

Mémoire sur les ensembles flous

Zahra houichi

27 juin 2018

Table des matières

Introduction	2
1 Généralités sur les ensembles flous	3
1.1 Rappels sur les ensembles classiques (Ordinaires)	3
1.2 Ensembles flous	6
1.3 Opérations sur les ensembles flous	7
1.4 Caractéristiques d'un ensemble flou	10
1.5 Ensembles classiques associés à un ensemble flou	13
1.6 Extensions des opérations sur les ensembles flous	16
1.6.1 Normes et conormes triangulaires	16
1.6.2 Extensions des opérations sur les ensembles flous	19
1.7 Extensions des ensembles flous	20
1.7.1 Ensembles L-flous	20
1.7.2 Ensembles flous intuitionnistes	23
2 Relations floues et leurs propriétés	25
2.1 Rappels sur les relations classiques	25
2.2 Relations floues : Définitions et exemples	27
2.3 Opérations sur les relations floues	32
2.4 Compositions de relations floues	33
2.5 Extension de compositions des relations floues	37
2.6 Propriétés de relations floues	40
2.7 Classes particulières de relation floue	41
2.7.1 Relation d'équivalence floue	41

2.7.2	Relation d'ordre floue	44
2.8	Extensions linéaires d'un ordre flou	51
Conclusion Général		58
Bibliographie		58

Introduction

La théorie des ensembles flous est une extension (généralisation) de la théorie des ensembles classiques (Zadeh [22]), elle est apparue pour modéliser certains aspects du monde réel, au travers d'un formalisme mathématique. La théorie des ensembles (dit classiques) apparaît trop rigide pour rendre compte de certains phénomènes. Les problèmes du monde réel doivent tenir compte d'information imprécises ou incertaines [13]. Prenons l'exemple d'une climatisation : si on veut obtenir une température fraîche, on peut se demander quelle gamme de températures conviendra (la demande est imprécise), de plus la fiabilité des capteurs entre en jeu (la mesure de la température ambiante est incertaine. On voit apparaître la difficulté d'interprétation des variable linguistique comme froid, chaud, ainsi que du traitement de ces données entachées d'incertitude.

L'étude des relations floues a été ainsi initiée par Zadeh en 1971 [23], qui sont des ensembles flous d'un produit cartésien. Elles ont été étudiées et certaines de leurs applications ont été abordées par plusieurs chercheurs, par exemple, Bede [3], Bělohávek [4], Bodenhofer [5, 6], Chon [8], Bouchon-Meunier [16, 17], Kheniche et al.[15], Mezzomo [18],...etc.

Le but de ce mémoire est d'étude des relations floues, plus précisément, l'étude de propriétés et les extensions floues de certains notions et théorèmes fondamentaux des relations classique.

Le mémoire est subdivisé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons des notions relatives aux ensembles classiques et aux ensembles flous puis nous allons présentons brièvement des propriétés fondamentales des ensembles flous. Aussi, les extensions floues certains théorèmes fondamentaux sur les ensembles flous.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter la notion de relation floue sur un ensemble (universe, ensemble référentiel), et on étudie de certains de ses propriétés. Aussi, des classes particulières des relations floues seront étudiées (relation d'équivalence et relation d'ordre floues).

Chapitre 1

Généralités sur les ensembles flous

Dans ce chapitre, nous allons rappeler des notions relatives aux ensembles classiques et aux ensembles flous puis nous allons présentons brièvement des propriétés fondamentales des ensembles flous, et aussi les extensions floues de quelques théorèmes fondamentaux sur les ensembles.

Les ensembles flous furent développés par L. A. Zadah en 1965 [22], ils sont une manière mathématique de représenter l'imprécision et l'incertain des phénomènes (la langue natural, physique, santé,...etc). Ils peuvent être considérés comme généralisation des ensembles classiques.

1.1 Rappels sur les ensembles classiques (Ordinaires)

Le concept d'un ensemble est fondamental en mathématiques, et peut intuitivement être décrit comme une collection d'objets éventuellement liés à travers certaines propriétés.

Dans cette section, nous allons présenté un rappelle sur l'ensemble classique et quelques exemples d'illustrations. Pour plus de détail voir [11].

Définition 1.1. (*Ensemble classique*) *Un ensemble $\mathcal{A}$ de référence X est une collection non ambigue d'objets tous distincts, appelés éléments de l'ensemble.*

Pour dire que a est un élément d'un ensemble $\mathcal{A}$, on écrit $a \in \mathcal{A}$, dans le cas contraire, on écrit $a \notin \mathcal{A}$. Un ensemble peut être défini par :

- (i) *L'écriture de ses éléments. Par exemple, si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$, on écrit : $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.*

- (ii) Des propriétés qui caractérisent ses éléments, par exemple, si les éléments de l'ensemble $\mathcal{B}$ satisfaisant les conditions $P_1, P_2, \dots, P_n$, alors l'ensemble $\mathcal{B}$ est définie par :

$$\mathcal{B} = \{b \mid b \text{ satisfait } P_1, P_2, \dots, P_n\}.$$

où le symbole " $\mid$ " désigne la phrase "telle que".

- (iii) Une fonction dite fonction caractéristique $\chi_{\mathcal{A}}$ qui prend la valeur 0 pour les éléments n'appartient pas à $\mathcal{A}$ et la valeur 1 pour ceux qui appartient à $\mathcal{A}$:

$$\chi_{\mathcal{A}} : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathcal{A}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Les ensembles classiques et leurs opérations peuvent être représentés par leurs fonctions caractéristiques [3]. En effet, considérons l'inclusion $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ si et seulement si $x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \mathcal{B}$. C'est-à-dire,

$$(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(x) \leq \chi_{\mathcal{B}}(x), \forall x \in X).$$

Pour l'égalité $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ si et seulement si $x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \mathcal{B}$ et $x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$. C'est-à-dire,

$$(\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_{\mathcal{B}}(x), \forall x \in X).$$

l'union $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x \in X \mid x \in \mathcal{A} \text{ ou } x \in \mathcal{B}\}$. Sa fonction caractéristique est

$$\chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = \max\{\chi_{\mathcal{A}}(x), \chi_{\mathcal{B}}(x)\}.$$

Pour l'intersection $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x \in X \mid x \in \mathcal{A} \text{ et } x \in \mathcal{B}\}$ la fonction caractéristique est

$$\chi_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = \min\{\chi_{\mathcal{A}}(x), \chi_{\mathcal{B}}(x)\}.$$

Si nous considérons le complément de $\mathcal{A}$ dans X , $\mathcal{A}^c = \{x \in X \mid x \notin \mathcal{A}\}$ il a la fonction caractéristique

$$\chi_{\mathcal{A}^c}(x) = 1 - \chi_{\mathcal{A}}(x).$$

Pour la différence

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \mathcal{B} &= \{x \in X \mid x \in \mathcal{A} \text{ et } x \notin \mathcal{B}\} \\ &= \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c. \end{aligned}$$

$$\text{C'est-à-dire, } \chi_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c}(x) = \chi_{\mathcal{A}}(x) \wedge \chi_{\mathcal{B}^c}(x).$$

Exemple 1.1. Soit X un ensemble des planètes solaires, on peut définir les deux ensembles classiques $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ par, $\mathcal{A}_1$: des planètes naines,
 $\mathcal{A}_2 = \{\text{Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune}\}.$

Exemple 1.2. L'ensemble des nombres compris entre 6 et 8 est caractérisé par la fonction :

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 6 \leq x \leq 8, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.2. (Propriétés fondamentales des opérations)[11] Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in X$ on a les propriétés suivantes

<i>Involution</i>	$(\mathcal{A}^c)^c = \mathcal{A}$
<i>Commutativité</i>	$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$
<i>Associativité</i>	$\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$ $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$
<i>Distributivité</i>	$\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$ $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$
<i>Idempotence</i>	$\mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A}$ $\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}$
<i>Absorption</i>	$\mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathcal{A}$ $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{A}$
<i>Loi de DeMorgan</i>	$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c$ $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c$
<i>Absorption de complément</i>	$\mathcal{A} \cup (\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$
<i>Loi de non contradiction</i>	$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c = \phi$
<i>Tiers exclu</i>	$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c = X$

1.2 Ensembles flous

Le concept de l'ensemble flou a été introduit par [Zadeh] [22] comme une généralisation de la notion de l'ensemble classique.

Définition 1.3. (*Ensemble flou*)[22] Un ensemble flou $\mathcal{A}$ de X est défini par une fonction d'appartenance qui associé à chaque élément x de X , le degré $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ compris entre 0 et 1, avec lequel x appartient à $\mathcal{A}$:

$$\mu_{\mathcal{A}} : X \longrightarrow [0, 1].$$

Remarque 1.1. Dans le cas particulier où $\mu_{\mathcal{A}}$ ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1, l'ensemble flou $\mathcal{A}$ devenu un ensemble classique de X .

Notation 1.1. Soit X l'ensemble de référence, Un ensemble flou $\mathcal{A}$ de X , généralement noté par : $\mathcal{A} = \{\langle x, \mu_{\mathcal{A}}(x) \rangle, x \in X\}$.

L'ensemble qui contient tous les ensembles flous de X note par $F(X)$.

Exemple 1.3. (*Cas fini*)[1] Soit X l'ensemble de certain âge des personnes.

$$X = \{5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85\}.$$

Nous pouvons définir des ensembles flous tels que " $\mathcal{P}$ = enfant", " $\mathcal{Q}$ = jeune", " $\mathcal{R}$ = adulte" et " $\mathcal{S}$ = Sénior" dans X . Les possibilités de chaque élément de x soit dans ces quatre ensembles flous sont dans le tableau suivant :

âge(éléments)	enfant	jeune	adulte	sénior
5	0	0	0	0
15	0	0.2	0.1	0
25	0	1	0.9	0
35	0	0.8	1	0
45	0	0.4	1	0.1
55	0	0.1	1	0.2
65	0	0	1	0.6
75	0	0	1	1
85	0	0	1	1

Tableau 1 : Exemple d'ensemble flou .

Exemple 1.4. (Cas infini) Soit $X = [a, b]$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{A}$ un ensemble de X définie par :

$$\mu(x) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x, \\ 1 & \text{si } a < x < b, \\ 1 + \left(\frac{x - a}{\alpha}\right) & \text{si } a - \alpha < x < a, \\ 1 - \left(\frac{b - x}{\beta}\right) & \text{si } b < x < b + \beta. \end{cases}$$

Alors, $\mathcal{A}$ est un ensemble flou de X , voire la figure (1.1).

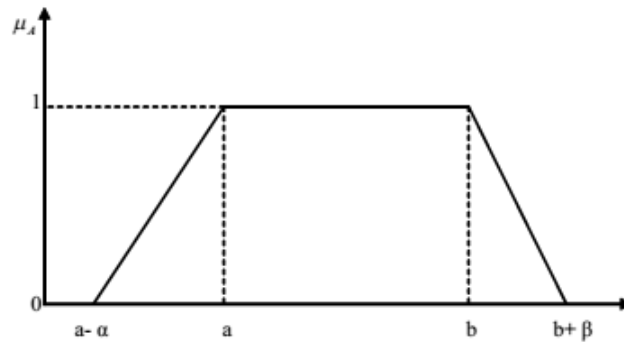


FIGURE 1.1 – l'ensemble flou $\mathcal{A}$ de X .

1.3 Opérations sur les ensembles flous

Comme dans la théorie des ensembles classique, en théorie des ensembles flous, il existe un certain nombre d'opérations, on étend ces opérations aux fonctions d'appartenance des ensembles flous par quelques opérateurs comme, min, max, ... ([19],[17]).

Pour deux ensembles flous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de l'ensemble X on a :

- (1) **L'inclusion** on dit que $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathcal{B}$, qu'on note alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, si tout élément x de X qui appartient à $\mathcal{A}$ appartient aussi à $\mathcal{B}$ avec un degré au moins aussi grand. On a $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ si et seulement si $\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x)$.
- (2) **L'égalité** on dit que deux ensembles flous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont égaux, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément x de X . on a $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ si et seulement si : $\mu_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{B}}(x)$.

- (3) **L'intersection** de deux ensembles flous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est l'ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus petit des degrés avec lesquels ils appartiennent à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, pour tout élément x de X on a $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est donné par $\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x))$.
- (4) **L'union** de deux ensembles flous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est l'ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus grand des degrés avec lesquels ils appartiennent à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, pour tout élément x de X on a $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est donné par $\mu_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = \max(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x))$.
- (5) **Le complément** d'un ensemble flou $\mathcal{A}$ noté $\mathcal{A}^c$ est l'ensemble flou constitué des éléments x lui appartenant d'autant plus à $\mathcal{A}^c$ qu'ils appartiennent peu à $\mathcal{A}$, pour tout élément x de X on a $\mathcal{A}^c$ est donné par $\mu_{\mathcal{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x)$.
- (6) **Addition** l'addition de deux ensembles flous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définie par

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{ \langle (x, \mu_{\mathcal{A}} + \mu_{\mathcal{B}} - \mu_{\mathcal{A}} \cdot \mu_{\mathcal{B}}) \rangle / x \in X \}.$$

Exemple 1.5. D'après l'exemple 1.3, on remarque que l'addition donné par de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$
 $\mathcal{Q} + \mathcal{R} = \{(15, 0.27), (25, 1), (35, 1), (45, 1), (55, 1), (65, 1), (75, 1), (85, 1)\}.$

- (7) **Multiplication** la multiplication de deux ensembles flous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définie par

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \{ \langle (x, \mu_{\mathcal{A}} \cdot \mu_{\mathcal{B}}) \rangle / x \in X \}.$$

Exemple 1.6. D'après l'exemple 1.3, on remarque que la multiplication de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ est
donnée par $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{R} = \{(15, 0.02), (25, 0.9), (35, 0.8), (45, 0.4), (55, 0.1), (65, 0), (75, 0), (85, 0)\}.$

Remarque 1.2. Nous observons que les opérations entre les ensembles flous sont définies point par point en termes d'opérations sur l'intervalle $[0, 1]$. Aussi, mentionnons ici que tout au long du texte nous utiliserons les notations suivantes $\min\{x, y\} = x \wedge y$, $\max\{x, y\} = x \vee y$ avec les opérations $x, y \in [0, 1]$ ou $x, y \in \mathbb{R}$. De plus, sans le danger d'une confusion majeure, nous utilisons les notions $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ pour désigner l'intersection et l'union de deux ensembles flous.

Exemple 1.7. D'après l'exemple 1.3, on remarque que :

Le complément d'un ensemble flou $\mathcal{R}$ est donné par :

$$\mathcal{R}^c = \{(5, 1), (15, 0.9), (25, 0.1)\}.$$

L'union de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ donnée par :

$$\mathcal{Q} \cup \mathcal{R} = \{(15, 0.2), (25, 1), (35, 1), (45, 1), (55, 1), (65, 1), (75, 1), (85, 1)\}.$$

L'intersection des ensembles flous $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \{(15, 0.1), (25, 0.9), (35, 0.8), (45, 0.4), (55, 0.1)\}.$$

Exemple 1.8. [3] les ensembles flous peuvent être utilisés pour exprimer des perceptions subjectives sous une forme mathématique. Soit $X = [40, 100]$ l'intervalle des températures d'une pièce.

$$\mathcal{A}_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 40 \leq x < 50, \\ 1 - \frac{x - 50}{10} & \text{si } 50 \leq x < 60, \\ 0 & \text{si } 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 40 \leq x < 50, \\ \frac{x - 50}{10} & \text{si } 50 \leq x < 60, \\ 1 - \frac{x - 60}{10} & \text{si } 60 \leq x < 70, \\ 0 & \text{si } 70 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

L'union peut être écrit

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 40 \leq x < 50, \\ 1 - \frac{x - 50}{10} & \text{si } 50 \leq x < 55, \\ \frac{x - 50}{10} & \text{si } 55 \leq x < 60, \\ 1 - \frac{x - 60}{10} & \text{si } 60 \leq x < 70, \\ 0 & \text{si } 70 < x \leq 100. \end{cases}$$

L'intersection peut être exprimée comme

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 40 \leq x < 50, \\ \frac{x - 50}{10} & \text{si } 50 \leq x < 55, \\ 1 - \frac{x - 50}{10} & \text{si } 55 \leq x \leq 60, \\ 0 & \text{si } 60 < x \leq 100, \end{cases}$$

Le complément de $\mathcal{A}_1$ peut être écrit

$$\mathcal{A}_1^c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 40 \leq x < 50, \\ \frac{x-50}{10} & \text{si } 50 \leq x < 60, \\ 1 & \text{si } 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

Le produit cartésien est une méthode de combinaison des ensembles flous définis sur des univers du discours différents.

Définition 1.4. (*Produit cartésien d'ensembles flous*) Soient des ensembles flous $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ respectivement définis sur $X_1, X_2, \dots, X_n$, on définit leur produit cartésien $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n$, comme un ensemble flou de X de fonction d'appartenance défini pour toute $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ par

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\mathcal{A}_n}(x_n)).$$

Exemple 1.9. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux ensembles flous respectivement définis sur $X_1 = \{x, y, z\}, X_2 = \{\alpha, \beta\}$ donnée par : $\mathcal{A} = \{ \langle x, 0.3 \rangle, \langle y, 0.6 \rangle, \langle z, 0.2 \rangle \}, \mathcal{B} = \{ \langle \alpha, 0.6 \rangle, \langle \beta, 0.8 \rangle \}$ Alors on obtient : $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{ \langle (x, \alpha), 0.3 \rangle, \langle (x, \beta), 0.3 \rangle, \langle (y, \alpha), 0.6 \rangle, \langle (y, \beta), 0.6 \rangle, \langle (z, \alpha), 0.2 \rangle, \langle (z, \beta), 0.2 \rangle \}$.

Propriété 1.1. [17] Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles flous alors

- (1) Loi de De Morgan : $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c, (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c,$
- (2) $(\mathcal{A}^c)^c = \mathcal{A},$
- (3) $\emptyset^c = X,$
- (4) $X^c = \emptyset,$
- (5) $|\mathcal{A}| + |\mathcal{A}^c| = |X|.$

Remarque 1.3. Contrairement aux ensembles classiques, il vérifie généralement

$\mathcal{A}^c \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\mathcal{A}^c \cup \mathcal{A} \neq X$, c'est-à-dire qu'il ne vérifie pas les propriétés classiques de la non-contradiction et du tiers exclu. Les autres propriétés de la théorie des ensembles classiques sont cependant satisfaites.

1.4 Caractéristiques d'un ensemble flou

Les caractéristiques d'un ensemble flou $\mathcal{A}$ de X les plus utiles pour le décrire sont celle qui montre à quel point il diffère d'un ensemble classique de X .

Définition 1.5. (*Support d'un ensemble flou*)[17] *Le support de $\mathcal{A}$, noté $Supp(\mathcal{A})$, est la partie de X sur laquelle la fonction de $\mathcal{A}$ n'est pas null*

$$Supp(\mathcal{A}) = \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) \neq 0\}.$$

Définition 1.6. (*Hauteur d'un ensemble flou*)[17] *La hauteur de $\mathcal{A}$ notée $H(\mathcal{A})$, est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance*

$$H(\mathcal{A}) = \sup_{x \in X} (\mu_{\mathcal{A}}(x)).$$

Définition 1.7. *L'ensemble flou $\mathcal{A}$ de X est normalisé si sa hauteur $H(\mathcal{A})$ est égale à 1.*

Définition 1.8. (*Noyau d'un ensemble flou*)[17] *Le noyau de $\mathcal{A}$, noté $Noy(\mathcal{A})$, est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de $\mathcal{A}$ vaut 1*

$$Noy(\mathcal{A}) = \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\}.$$

Proposition 1.1. [17] *Le support et le noyau de $\mathcal{A}$ et de son complément vérifient :*

$$Supp(\mathcal{A}^c) = X - (Noy(\mathcal{A}^c)) \text{ et } Noy(\mathcal{A}^c) = X - (Supp(\mathcal{A}^c)).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble flou sur X . Alors

$$\begin{aligned} Supp(\mathcal{A}^c) &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}^c}(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in X / 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) \neq 1\} \\ &= \{x \in X / x \notin Noy(\mathcal{A})\} \\ &= X - Noy(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
Noy(\mathcal{A}^c) &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}^c}(x) = 1\} \\
&= \{x \in X / 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\} \\
&= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) = 0\} \\
&= \{x \in X / x \notin Supp(\mathcal{A})\} \\
&= X - Supp(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

□

Définition 1.9. (Cardinalité d'un ensemble flou)[17] La cardinalité d'un ensemble flou $\mathcal{A}$ de X , notée $|\mathcal{A}|$, lorsque X est fini, est définie par :

$$|\mathcal{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\mathcal{A}}(x).$$

Exemple 1.10. [17] Soit X l'ensemble fini des pays, donnée par :

$X = \{\text{Allemagne, Belgique, Espagne, France, Grande - Bretagne, Italie}\}$ l'ensemble des pays susceptibles d'être un lieu de résidence pour un individu donné, notés A, B, E, F, G, I . on peut définir les ensemble flous suivant, correspondant à la description des souhaits de l'individu :

$$\mathcal{A} = \{\langle A, 0.6 \rangle, \langle B, 0.7 \rangle, \langle E, 0.4 \rangle, \langle F, 0.3 \rangle, \langle G, 0.8 \rangle, \langle I, 0.5 \rangle\}.$$

1. $Supp(\mathcal{A}) = X$,
2. $H(\mathcal{A}) = 0.8$,
3. $Noy(\mathcal{A}) = \emptyset$,
4. $|\mathcal{A}| = 3.3$.

Inversement, la connaissance d'une caractérisation floue globale définie sur un univers complexe doit permettre de donner des informations sur les différentes composantes de cet univers et de définir des caractérisations floues sur chacune de ces composantes. Soit un ensemble flou $\mathcal{A}$ défini sur un univers $X_1 \times X_2$, produit cartésien de deux ensembles de référence X_1 et X_2 .

Définition 1.10. (Projection d'ensemble flou)[17] La projection sur X_1 d'un ensemble flou $\mathcal{A}$ de $X_1 \times X_2$ est l'ensemble flou $P_{X_1}(\mathcal{A})$ de X_1 , dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\forall x_1 \in X_1, \mu_{p_{X_1}(\mathcal{A})}(x_1) = \sup_{x_2 \in X_2} (\mu_{\mathcal{A}}((x_1, x_2))).$$

On définit de façon analogue la projection de $\mathcal{A}$ sur X_2 , par $\mu_{p_{X_2}(\mathcal{A})}(x_2) = \sup_{x_1 \in X_1} (\mu_{\mathcal{A}}((x_1, x_2)))$.

Exemple 1.11. Pour poursuivre les exemple des lieux de résidence envisageables, considérons $X_1 = \{A, B, E, F\}$ un ensemble de pays $\{\text{Allemagne, Belgique, Espagne, France}\}$ et $X_2 = \{C, V\}$ l'ensemble des choix entre la compagne (C) et une ville (V). Supposons que les souhaits d'un individu soient indiqués par l'ensemble flous suivante de $X_1 \times X_2$.

$$S = \{\langle(A, C), 0.6\rangle, \langle(B, C), 0.8\rangle, \langle(E, C), 0.4\rangle, \langle(F, C), 0.3\rangle, \langle(A, V), 0.5\rangle, \langle(B, V), 0.2\rangle, \\ \langle(E, V), 0.3\rangle, \langle(F, V), 0.2\rangle\},$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{X_1}(S) &= \{\langle A, \max(0.6, 0.5)\rangle, \langle B, \max(0.8, 0.2)\rangle, \langle E, \max(0.4, 0.3)\rangle, \langle F, \max(0.3, 0.2)\rangle\} \\ &= \{\langle A, 0.6\rangle, \langle B, 0.8\rangle, \langle E, 0.4\rangle, \langle F, 0.3\rangle\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{X_2}(S) &= \{\langle C, \max(0.6, 0.8, 0.4, 0.3)\rangle, \langle V, \max(0.5, 0.2, 0.3, 0.2)\rangle\} \\ &= \{\langle C, 0.8\rangle, \langle V, 0.5\rangle\}. \end{aligned}$$

1.5 Ensembles classiques associes à un ensemble flou

Étant donné l'ensemble flou $\mathcal{A}$ de l'ensemble de référence X , on choisit un seuil α entre 0 et 1. On construit l'ensemble ordinaire $\mathcal{A}$ de X associé à $\mathcal{A}$ pour ce seuil, en sélectionnant tous les éléments de X qui appartiennent à $\mathcal{A}$ avec un degré au moins égal à α . [17]

Définition 1.11. (*Le niveau de flou*) [17] Pour un seuil donné α de $[0, 1]$, on définit la α -coupe d'un ensemble flou $\mathcal{A}$ de X (ou ensemble de niveau α associé à $\mathcal{A}$) comme l'ensemble

$$\mathcal{A}_\alpha = \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

Dont la fonction caractéristique $\chi_{\mathcal{A}_\alpha}$ est telle que $\chi_{\mathcal{A}_\alpha}(x)$ est égale a 1 si et seulement si $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ est supérieur ou égale a 1.

Proposition 1.2. [17] Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles flous et soit $\alpha \in [0, 1]$

- (i) les α -coupes de $\mathcal{A}$ sont des parties non floues de X emboîtées par rapport à la valeur du niveau α , c'est-à-dire que si $\alpha' \geq \alpha$, alors $\mathcal{A}_\alpha \supseteq \mathcal{A}_{\alpha'}$,
- (ii) Si $\alpha = 0$, alors $\mathcal{A}_0 = h(\mathcal{A}) = X$,

(iii) Si $\alpha = 1$, alors $\mathcal{A}_1 = \text{Noy}(\mathcal{A})$,

(iv) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})_\alpha = \mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{B}_\alpha$,

(v) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})_\alpha = \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B}_\alpha$,

(vi) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \implies \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles flous sur X . Alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})_\alpha &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) \vee \mu_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\} \cup \{\mu_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha\} \\ &= \mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{B}_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})_\alpha &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) \wedge \mu_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\} \cap \{\mu_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha\} \\ &= \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B}_\alpha \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \implies \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{soit } x \in \mathcal{A}_\alpha &\implies \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha \\ &\implies \mu_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha \\ &\implies x \in \mathcal{B}_\alpha \end{aligned}$$

□

Exemple 1.12. Soient $E = \{a, b, c\}$ un ensemble référentiel, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles flous dans E tels que : $\mathcal{A} = \{(a, 0.3), (b, 1), (c, 0.7)\}$ et $\mathcal{B} = \{(a, 0), (b, 0.9), (c, 0.8)\}$.

Alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{(a, 0.3), (b, 1), (c, 0.8)\}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{(a, 0), (b, 0.9), (c, 0.7)\}$.

Donc on obtient,

$$\mathcal{A}_{0.3} = \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq 0.3\} = \{a, b, c\} \text{ et } \mathcal{B}_{0.3} = \{x \in X / \mu_{\mathcal{B}}(x) \geq 0.3\} = \{b, c\},$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})_{0.3} &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) \geq 0.3\} \\ &= \mathcal{A}_{0.3} \cup \mathcal{B}_{0.3} \\ &= \{a, b, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}; \\ (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})_{0.3} &= \{x \in X / \mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) \geq 0.3\} \\ &= \mathcal{A}_{0.3} \cap \mathcal{B}_{0.3} \\ &= \{a, b, c\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}. \end{aligned}$$

On peut considérer le niveau α comme une limite stricte de représentativité d'un élément de X pour l'ensemble flou $\mathcal{A}$ de X donné.

Définition 1.12. (Le niveau strict de flou)[17] Pour tout niveau α de $[0, 1]$, on définit la α -coupe strict d'un ensemble flou $\mathcal{A}$ comme l'ensemble

$$\mathcal{A}^\alpha = \{x \in X / \mu_{\mathcal{A}}(x) > \alpha\}.$$

Remarque 1.4.

- (i) $\mathcal{A}^\alpha$: l'ensemble net d'éléments appartient à l'ensemble flou $\mathcal{A}$ au moins au degré α .
- (ii) Les niveaux stricts de flous ont les mêmes propriétés que les niveaux de flous,
- (iii) Si $\alpha = 0$, le 0-coupe d'un ensemble flou $\mathcal{A}$ coïncide à la définition d'un support c-à-d

$$\mathcal{A}^0 = \text{supp}(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\mathcal{A}}(x) > 0\},$$

- (iv) Si $\alpha = 1$, le 1-coupe d'un ensemble flou $\mathcal{A}$ coïncide à un ensemble référence X , c-à-d $\mathcal{A}^1 = X$,

Théorème 1.1. (Théorème de décomposition)[17] Tout ensemble flou $\mathcal{A}$ de l'ensemble de référence X est défini à partir de ses α -coupes pour tout élément x de X :

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{\mathcal{A}^\alpha}(x)).$$

Démonstration Soit $x \in X$, on pose $\mu_{\mathcal{A}}(x) = \beta$ tel que $(\beta \in [0, 1]), x \in \mathcal{A}$. Donc $\mu_{\mathcal{A}}(x) = \beta \cdot \chi_{\mathcal{A}^\beta}(x)$ et $\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{\mathcal{A}^\alpha}(x))$. Réciproquement, soit $x \in X$ pour tout niveau β on a

$$\begin{cases} \chi_{\mathcal{A}^\beta}(x) = 1 & \text{si } \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \beta, \\ \chi_{\mathcal{A}^\beta}(x) = 0 & \text{si } \mu_{\mathcal{A}}(x) < \beta. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) = \beta & \text{si } \mu_A(x) \geq \beta, \\ \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) = 0 & \text{si } \mu_A(x) < \beta. \end{cases}$$

Dans les deux cas, $\beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) \leq \mu_A(x)$. D'où, $\sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)) \leq \mu_A(x)$.

Par conséquent, pour tout $x \in X$: $\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x))$.

Exemple 1.13. Soit X l'ensemble de référence et soit A l'ensemble flou.

$$A = \{\langle a, 0.2 \rangle, \langle b, 0.4 \rangle, \langle c, 0.6 \rangle, \langle d, 0.8 \rangle, \langle e, 1 \rangle, \langle f, 1 \rangle\}.$$

On a pour tout niveau α dans $[0, 1]$:

$$A_1 = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 1\} = \{e, f\},$$

$$A_{0.8} = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.8\} = \{d, e, f\},$$

$$A_{0.2} = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.2\} = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

On obtient donc :

$$\mu_A(a) = \max(1 \times 0, \dots, 0.2 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.2,$$

$$\mu_A(b) = \max(1 \times 0, \dots, 0.4 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.4,$$

$$\mu_A(c) = \max(1 \times 0, \dots, 0.6 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.6,$$

$$\mu_A(d) = \max(1 \times 0, \dots, 0.8 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.8,$$

$$\mu_A(e) = \max(1 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 1,$$

$$\mu_A(f) = \max(1 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 1.$$

Ce qui fournit bien l'ensemble A .

1.6 Extensions des opérations sur les ensembles flous

Les opérations d'intersection, d'union et de complémentation d'un ensembles flous habituellement employées peuvent être remplacées par d'autres opérations construites à l'aide d'opérateurs ont été introduits dans le domaine des espaces métrique aléatoires et on fait appel à eux lorsque les opérateurs habituelles ne s'avèrent pas satisfaisantes.

1.6.1 Normes et conormes triangulaires

Les normes et les conormes triangulaires généralisent les connexions de base entre les ensembles flous. Elles ont d'abord été introduites dans la théorie des espaces métriques probabi-

listes. Plus tard, ils ont été jugés très appropriés pour être utilisés avec des ensembles flous.

Définition 1.13. (*Norme triangulaire, t-norme*)[14] Une norme triangulaire T est une fonction définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ qui satisfait aux conditions qui suivent :

- (i) $\forall x, y \in [0, 1] : T(x, y) = T(y, x)$ (Commutativité),
- (ii) $\forall x, y, z \in [0, 1] : T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (Associativité),
- (iii) $\forall x, y, z, t \in [0, 1] : T(x, y) \leq T(z, t)$ si $x \leq z$ et $y \leq t$ (Monotonie),
- (iv) $\forall x \in [0, 1] : T(0, 0) = 0, T(x, 1) = T(1, x) = x$ (élément neutre 1).

Cas particulier : L'opérateur $T = \min$ est une norme triangulaire.

Définition 1.14. (*Conorme triangulaire, t-conorme*)[14] Une conorme triangulaire S est une fonction définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ qui satisfait aux conditions qui suivent :

- (i) $\forall x, y \in [0, 1] : S(x, y) = S(y, x)$ (Commutativité),
- (ii) $\forall x, y, z \in [0, 1] : S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ (Associativité),
- (iii) $\forall x, y, z, t \in [0, 1] : S(x, y) \leq S(z, t)$ si $x \leq z$ et $y \leq t$ (Monotonie),
- (iv) $\forall x \in [0, 1] : S(1, 1) = 1, S(x, 0) = S(0, x) = x$ (élément neutre 0).

Cas particulier : L'opérateur $S = \max$ est une conorme triangulaire.

Proposition 1.3. [3] Compte tenu de tout t -norme et t -conorme, pour tous $x, y \in [0, 1]$, nous avons

- (1) $T(x, 0) = 0$ et $S(x, 1) = 1$,
- (2) $T(x, y) \leq x \wedge y$,
- (3) $S(x, y) \geq x \vee y$.

Démonstration.

- (1) D'après (iv) nous avons $T(0, 1) = 0$. Dans la forme (iii), il s'ensuit que

$$T(0, x) \leq T(0, 1) = 0, \forall x \in [0, 1],$$

c'est-à-dire, $T(0, x) = 0$. Dans la forme (i) on a $T(x, 0) = 0$. De même, nous avons $S(1, 0) = 1$ alors,

$$1 = S(1, 0) \leq S(1, x),$$

et alors

$$S(1, x) = 1 = S(x, 1), \forall x \in [0, 1].$$

(2) Nous avons

$$T(x, y) \leq T(x, 1) = x.$$

aussi,

$$T(x, y) = T(y, x) \leq T(y, 1) = y.$$

En conclusion $T(x, y) = x \wedge y$. De même $S(x, y) = x \vee y$.

□

Exemple 1.14. [17]

Différentes normes et conormes triangulaires :

Le tableau suivant représente les t-normes et t-conormes les plus utilisées.

<i>t-norme</i>	<i>t-conorme</i>	<i>nom</i>
$T_M(x, y) = \min(x, y)$	$S_M(x, y) = \max(x, y)$	Zadeh
$T_P(x, y) = x.y$	$S_P(x, y) = x + y - x.y$	Probabilite
$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$	$S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$	Lukasiewicz
$\frac{xy}{\gamma + (1 - \gamma)(x + y - xy)}$	$\frac{x + y + xy - (1 - \gamma)xy}{1 - (1 - \gamma)xy}$	Hamacher ($\gamma > 0$)
$\max((1 - ((1 - x)^p + (1 - y)^p)^{1/p}, 0)$	$\min((x^p + y^p)^{1/p}, 1)$	Yeger ($p > 0$)
$\max((x + y - 1 + \lambda xy)/(1 + \lambda), 0)$	$\min(x + y + \lambda xy, 1)$	Weber ($\lambda > -1$)
$T_D = \begin{cases} x \text{ si } y = 1 \\ y \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$S_D = \begin{cases} x \text{ si } y = 0 \\ y \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$	Drastique

FIGURE 1.2 – Principales t-normes et t-conormes duales

Propriété 1.2. [17]

- (i) L'opérateur $T = \min$ est la plus grande des t -normes, l'opérateur $S = \max$ la plus petite des t -conormes. Les t -norme et t -conorme ont les propriétés suivantes : Toute t -normes T et toute t -conormes S vérifient les inégalités suivantes :

$$\forall x, y \in [0, 1], T_D(x, y) \leq T(x, y) \leq \min(x, y),$$
$$\max(x, y) \leq (x, y) \leq S_D(x, y).$$

tel que T_D est une t -norme drastique.

- (ii) Les opérateurs de Hamacher deviennent les opérateurs drastiques si γ tend vers l'infini est sont identiques aux opérateurs probabilistes si $\gamma = 1$. Les opérateurs de Yager sont identiques à ceux de Lukasiewicz quand $P = 1$ et tendent vers ceux de [Zadeh] quand P tend vers l'infini.

La connexion entre t -norme et t -conorme est faite de fortes négations comme suit :

Définition 1.15. (*L'opérateur négation*)[17] Une négation est une fonction $n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant :

- (i) $n(0) = 1$ et $n(1) = 0$,
- (ii) Monotonie $x \leq y \Rightarrow n(y) \leq n(x), \forall x, y \in [0, 1]$.

Cas particulier : La complémentation à 1 (défini par $n(x) = 1 - x$) est une négation strict et involutive donc on peut définir le complément d'un ensemble flou par l'opérateur négation $\mathcal{A}^{c_n}$ telle que :

$$\mu_{\mathcal{A}^{c_n}}(x) = n(\mu_{\mathcal{A}}(x)).$$

Remarque 1.5. Une négation stricte est appelée forte négation si elle est involutive, (c'est-à-dire, $n(n(x)) = x$).

Définition 1.16. (*Dualité entre opérateurs*)[17] Une t -norme T et une t -conorme S sont dites duales pour la négation stricte n si elles satisfont les relations suivantes pour tous x et y de $[0, 1]$:

$$S(x, y) = n(T(n(x), n(y))),$$
$$T(x, y) = n(S(n(x), n(y))).$$

Propriété 1.3. [17] *Si une t -norme T et une t -conorme S sont duales pour la négation stricte n , l'intersection $\cap_T$ et l'union $\cup_S$ qu'elles définissent vérifient les lois de De Morgan pour la définition du complément $\mathcal{A}^{c_n}$ de associée :*

$$(\mathcal{A} \cap_T \mathcal{B})^{c_n} = \mathcal{A}^{c_n} \cup_S \mathcal{B}^{c_n}, (\mathcal{A} \cup_S \mathcal{B})^{c_n} = \mathcal{A}^{c_n} \cap_T \mathcal{B}^{c_n}.$$

1.6.2 Extensions des opérations sur les ensembles flous

Dans toutes les définitions des opérations dans les lignes précédentes, nous avons utilisé les combinaisons des fonctions d'appartenances, en utilisant notamment les opérateurs de minimum, maximum et de complément à 1. Les normes et conormes triangulaires constituent une généralisation des opérateurs de type maximum ou minimum. [20]

Définition 1.17. (*L'intersection définie par une t -norme*) *On vérifie simplement que l'opérateur de minimum est une t -norme. La définition d'un opérateur d'intersection entre deux ensembles flous se réfère à une t -norme, qui remplace l'opérateur minimum :*

$$\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = T(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \forall x \in X.$$

Définition 1.18. (*Union définie par une t -conorme*) *On vérifie simplement que l'opérateur de maximum est une t -conorme. La définition d'un opérateur d'union entre deux ensembles flous se réfère à une t -conorme, qui remplace l'opérateur maximum :*

$$\mu_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = S(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \forall x \in X.$$

Exemple 1.15. *Soit $X = \{x, y, z\}$ et soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux ensembles flous de X telle que $\mathcal{A} = \{\langle x, 0.4 \rangle, \langle y, 0.1 \rangle, \langle z, 0.7 \rangle\}$, $\mathcal{B} = \{\langle x, 0.6 \rangle, \langle y, 0.3 \rangle, \langle z, 1 \rangle\}$. On peut utiliser les opérateurs de Lukasiewicz pour définir respectivement l'intersection et l'union par :*

$$(i) \mu_{\mathcal{A} \cap_T \mathcal{B}}(x) = T(\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{B}}) = \max(\mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(x) - 1, 0), \forall x \in X,$$

$$(ii) \mu_{\mathcal{A} \cup_S \mathcal{B}}(x) = S(\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{B}}) = \min(\mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(x), 1), \forall x \in X.$$

Alors on obtient

$$(i) \mu_{\mathcal{A} \cap_T \mathcal{B}}(x) = \{\langle x, 0 \rangle, \langle y, 0.6 \rangle, \langle z, 0.7 \rangle\},$$

$$(ii) \mu_{\mathcal{A} \cup_S \mathcal{B}}(x) = \{\langle x, 1 \rangle, \langle y, 0.4 \rangle, \langle z, 1 \rangle\}.$$

Définition 1.19. (*Le produit cartésien définie par t-norme*) Les T -normes sont aussi utilisées pour définir le produit cartésien. Ainsi, pour deux ensembles flous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des univers de discours X et Y , le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est caractérisé par la fonction d'appartenance $\mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} : X \times Y &\longrightarrow [0, 1]. \\ (x, y) &\longmapsto \mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(x, y) = T(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(y))\end{aligned}$$

1.7 Extensions des ensembles flous

Dans cette section, nous allons s'intéresser spécialement au Treillis et qui est un outil appliquer pour obtenir des extensions d'un ensemble flou.

1.7.1 Ensembles L-flous

Dans la théorie des ensembles flous, la fonction d'appartenance de l'ensemble flou est une fonction classique $\mathcal{A} : X \longrightarrow [0, 1]$. Dans certaines applications, la forme de l'appartenance est elle même incertaine. Ce problème apparaît principalement à cause de la subjectivité de la connaissance experte et de l'imprécision de nos modèles. Dans ces situations, nous appliquer une extension plus pousse de la théorie des ensembles flous[3], [12].

Treillis

Les treillis constituent une catégorie très importante d'ensembles ordonnés, car ils font le lien entre l'étude des relations d'ordres et l'étude de certaines structures algébriques. Nous allons brièvement passer en revue quelques concepts des treillis contenant quelques propriétés très importantes qu'on définira et qu'on démontrera par la suite : Pour plus de détail voir[9, 24, 15].

Définition 1.20. (*Treillis*) Un ensemble ordonné $(L, \leq)$ est appelé un treillis (ou encore ensemble réticulé) si tout paire d'éléments $\{x, y\}$ d'éléments de L admet une borne supérieure et borne inférieure. On notera $x \vee y$ au lieu de $\sup\{x, y\}$, la borne supérieure de x et y et $x \wedge y$ la borne inférieure.

Exemple 1.16. $P(L)$ ordonné par l'inclusion est un treillis, Les opérations binaires $\vee$ et $\wedge$ étant respectivement $\cup$ et $\cap$.

Théorème 1.2. Soit $(L, \leq, \vee, \wedge)$ un treillis. Alors $\vee$ et $\wedge$ sont associatives, commutatives et $\forall x, y \in L : \text{idempotence } x \vee x = x \wedge x = x, \text{ absorption } x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x.$

Théorème 1.3. Soit L un ensemble non vide muni de deux opérations $\vee$ et $\wedge$ satisfaisant les propriétés du théorème (1.2). Alors :

- (i) $\forall x, y \in L, x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x,$
- (ii) $\leq$ définie par $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ est une relation d'ordre,
- (iii) $(L, \leq, \vee, \wedge)$ est un treillis et les opérations $\vee$ et $\wedge$ induites par $\leq$ coïncident avec les opérations $\vee$ et $\wedge$ originales.

Définition 1.21. Soient $(X, \leq, \vee, \wedge)$ un treillis et $\emptyset \neq Y \subseteq X$. On dit que $(Y, \leq)$ est un sous-treillis de $(X, \leq)$ si $\forall a, b \in Y, a \vee b$ et $a \wedge b \in Y$.

Remarque 1.6. Un sous-treillis est un treillis.

Définition 1.22. Soient X et Y deux treillis, $\mathcal{F} : X \longrightarrow Y$ une application. $\mathcal{F}$ est un morphisme de treillis si pour tous $a, b \in X$, $\mathcal{F}(a \vee b) = \mathcal{F}(a) \vee \mathcal{F}(b)$ et $\mathcal{F}(a \wedge b) = \mathcal{F}(a) \wedge \mathcal{F}(b)$. Un morphisme bijectif est un isomorphisme.

Définition 1.23. (Treillis distributif) Un treillis L est dit distributif si $\vee$ et $\wedge$ distribuent l'une par rapport à l'autre, c'est à dire L vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- (i) $\forall x, y, z \in L : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$
- (ii) $\forall x, y, z \in L : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$

Remarque 1.7. [8] Les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. En effet : supposons (i) soit vérifiée, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] \\
 &= x \vee [z \wedge (x \vee y)] \quad (\text{lois d'absorption}) \\
 &= x \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\
 &= x \vee (y \wedge z) \quad (\text{lois d'absorption})
 \end{aligned}$$

Donc (ii) est aussi vérifiée. La réciproque se démontre de façon analogue.

Définition 1.24. (Treillis complet) Un treillis L est appelé un treillis complet si toute partie de L admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Définition 1.25. (Treillis fermé) Un treillis L est dit fermé (au borné) si il possède un plus petit élément (que l'on notera 0) et un plus grand élément (que l'on notera 1). Une négation sur treillis fermé est sur l'opérateur $n : L \longrightarrow L$ tel que n est involutif c-à-dire

$$n(n(x)) = x, \forall x \in L,$$

$$n(0) = 1,$$

$$n(1) = 0.$$

et décroissante, c'est à dire si $x \leq y$ alors $n(x) \geq n(y)$, $\forall x, y \in L$.

Dans la suite, nous supposons que L est un treillis fermé avec une négation.

Exemple 1.17. Soit J une chaine avec un plus petit élément (0) et un plus grand élément (1), $n(\alpha) = 1 - \alpha$ est une involution décroissante sur J .

Définition 1.26. Soit L un treillis fermé et a, b des éléments de L . On dit que b est le **complément** de a (au bien a et b sont **compléments l'un de l'autre**) si $a \wedge b = 0$ et $a \vee b = 1$.

Définition 1.27. (Treillis complémenté) Dans un treillis fermé L si tout élément a un complément, L est dit **complémenté**.

Ensembles L-flous

Définition 1.28. [Goguen] [12] Soit L un treillis, un ensemble L -Flou de référence X est un application $\mathcal{A} : X \longrightarrow L$. La classe des ensembles L -flous noté par $\mathcal{F}_L(X)$. Les opérations sur les ensembles L -flous sont fournies par les $\inf$ et $\sup$ qui viennent former le treillis structure, les connecteurs de base des ensembles L - flous sont

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})(x) = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}(x) = \inf(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)),$$

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})(x) = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x) = \sup(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)),$$

$$n(\mathcal{A})(x) = n(\mathcal{A}(x)),$$

pour tout $x \in X$. En général, pour les ensembles L -flous la distributivité ne tient pas. Afin de pouvoir utiliser cette propriété, nous devons avoir un treillis distributif, c'est-à-dire que le $\sup$ est distributif respect $\inf$ et vice versa.

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

De plus, dans certaines cas, une distribution fermée pourrait être nécessaire, c'est-à-dire

$$a \vee \left(\bigwedge_{i \in I} b_i \right) = \bigwedge_{i \in I} a \vee b_i \quad \text{et} \quad a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} a \wedge b_i.$$

Si L est un treillis distributif (complètement distributif), alors les opérations de l'ensemble L -flou deviennent distributives (complètement distributives).

Exemple 1.18. $([0, 1], \leq)$ est un treillis complètement distributif. Alors les ensembles flous classiques peuvent être considérés comme des ensembles L -flous avec $L = [0, 1]$. Nous observons que $[0, 1]$ est un treillis fermé et complètement distributif. Nous observons que les ensembles L -flous avec les ensembles flous $\mathcal{F}(X)$.

1.7.2 Ensembles flous intuitionnistes

Le concept de l'ensemble flou intuitionniste a été introduit par K.T. Atanassov [2] comme une généralisation de la notion de l'ensemble flou [3].

Définition 1.29. (Ensemble flou intuitionniste) Soit X un ensemble de référence, un ensemble flou intuitionniste $\mathcal{A}$ (EFI) de X est l'ensemble des triplets

$$\{\langle x, \mu_{\mathcal{A}}(x), \nu_{\mathcal{A}}(x) \mid x \in X \rangle\}$$

$\mu_{\mathcal{A}}(x), \nu_{\mathcal{A}}(x)$ sont des applications de X dans $[0, 1]$ vérifier la condition

$$0 \leq \mu_{\mathcal{A}}(x) + \nu_{\mathcal{A}}(x) \leq 1.$$

$\mu_{\mathcal{A}}(x)$ représente le degré d'appartenance de x à $\mathcal{A}$.

$\nu_{\mathcal{A}}(x)$ représente le degré de non-appartenance de x à $\mathcal{A}$.

Remarque 1.8. Un ensemble flou $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ peut être interprété comme l'ensemble flou intuitionniste $\mathcal{A} = (\mu_{\mathcal{A}}(x), 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x))$. La réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Les opérations de base entre les ensembles flous intuitionnistes sont définies comme suit

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = (\min(\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{B}}), \max(\nu_{\mathcal{A}}, \nu_{\mathcal{B}}))$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (\max(\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{B}}), \min(\nu_{\mathcal{A}}, \nu_{\mathcal{B}}))$$

$$n(\mathcal{A}) = (\nu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}).$$

Nous désignons la collection de tous les ensembles flous intuitionnistes par $IFS(X)$.

Proposition 1.4. *L'ensemble IFS avec les opérations d'union intersection et complément définies comme ci-dessus est un treillis. De plus, il est complet et complètement distributif.*

Remarque 1.9. *Les ensembles flous intuitionnistes peuvent considérés comme des ensembles L -flous en considérant le treillis $L \subseteq [0, 1]^2$,*

$$L = \{(x, y) \in [0, 1]^2 | x + y \leq 1\}$$

où la relation d'inégalité générant la structure en treillis est définie par

$$(x, y) \leq_L (z, t) \Leftrightarrow [x \leq z \text{ and } y \leq t].$$

De plus, L est dans ce cas un treillis complet et complètement distributif.

Chapitre 2

Relations floues et leurs propriétés

Dans ce chapitre, nous allons développer la notion de relation floue sur un ensemble, et on étudie quelques propriétés des relations floues et les extensions floues des théorèmes fondamentaux sur les relations. Aussi, des classes particulières des relations floues seront étudiées.

Parmi les concepts flous les plus importants du point de vue des applications qu'ils peuvent avoir, les relations floues généralisent la notion de relation classique définie sur des ensembles. Elles mettent en évidence des liaisons imprécises ou graduelles entre éléments d'un même ensemble [23].

2.1 Rappels sur les relations classiques

Avant d'entamer la définition d'une relation floue on procède à définir la relation classique. Dans cette section, nous allons présenter des définitions de base et quelques propriétés des relations classiques [3], [7].

Définition 2.1. (*Relation classique*) Soient X, Y deux ensembles non vides, une relation binaire $\mathcal{R}$ entre deux ensembles X et Y est une partie de $X \times Y$. Pour toute $(x, y) \in \mathcal{R} \subseteq X \times Y$, on note $x\mathcal{R}y$. Une relation classique peut être caractérisée par une relation $\mathcal{R} : X \times Y \longrightarrow \{0, 1\}$,

$$\mathcal{R}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \mathcal{R}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.2. (*Relation binaire sur un ensemble*) Soit X un ensemble quelconque, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur X est une partie de X^2 , c'est-à-dire $\mathcal{R} = \{(a, b) : (a, b) \in X^2\}$. Si $\mathcal{R}$

une relation binaire sur un ensemble X et $(a, b) \in \mathcal{R}$, on dit que **a** est en relation avec **b** selon $\mathcal{R}$ et on écrit $a\mathcal{R}b$.

Exemple 2.1. [22] Sur $X = \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{R}_1 = \{(m, n) \mid m \leq n\}$ est une relation, $\mathcal{R}_1 = \{(m, n) \mid m/n\}$ est une relation sur $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

Définition 2.3. (*Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble*) [7] Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide X

- $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si $(x, x) \in \mathcal{R}$, pour tout $x \in X$,
- $\mathcal{R}$ est dite **irréflexive** si $(x, x) \notin \mathcal{R}$, pour tout $x \in X$,
- $\mathcal{R}$ est dite **Non-réflexive** si et seulement si, $(x, x) \notin \mathcal{R}$, il existe $x \in X$,
- $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si $(x, y) \in \mathcal{R} \iff (y, x) \in \mathcal{R}$, pour tout $x, y \in X$,
- $\mathcal{R}$ est dite **antisymétrique** si $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, x) \in \mathcal{R} \implies x = y$ pour tout $x, y \in X$,
- $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \in \mathcal{R}$ pour tout $x, y, z \in X$.

Une relation binaire $\leq$ sur un ensemble X est dite **relation d'ordre**(ou bien ordre partiel) si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Dans ce cas le couple $(X, \leq)$ est dit **ensemble ordonné**(ou bien ensemble partiellement ordonné, au tout simplement poset). S'il existe au moins deux éléments $x, y \in X$ tel que $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$. Si pour tout $x, y \in X$, $x \leq y$ ou $y \leq x$ la relation d'ordre est dite **ordre totale ou linéaire**. Une relation binaire $<$ sur un ensemble X est dite **ordre strict** si elle est irréflexive et transitive. Dans ce cas le couple $(X, <)$ est dit **ensemble strictement ordonné**.

Si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, $\mathcal{R}$ est **une relation d'équivalence** sur X .

Exemple 2.2.

- (1) L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est partiellement ordonné par la relation de divisibilité. On note ce poset par $(\mathbb{N}^*, \mid)$.
- (2) L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas partiellement ordonné par rapport à la divisibilité. Soit x un élément non nul. On a x divise $-x$, et $-x$ divise x . Mais x n'est pas égal à $-x$, et donc la propriété d'antisymétrie n'est pas valide.
- (3) L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'ordre naturel est totalement ordonné.

Proposition 2.1. [INT][6] *Toute ordre partielle peut être représentée comme une intersection des ordres linéaires : Pour toute ordre partielle $\lesssim$, il existe une famille de ordre linéaires $(\preceq_i)_{i \in I}$ tel que $\lesssim$ peut être représenté comme (pour tous $x, y \in X$)*

$$x \lesssim y \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} x \preceq_i y.$$

2.2 Relations floues : Définitions et exemples

Dans cette section, nous devons définir plusieurs types fondamentaux de relation floue qui seront nécessaires tout au long de cette travail.

Définition 2.4. (Relation n -aires floue)[23] *Une relation floue $\mathcal{R}$ entre n ensembles $X_1, X_2, \dots, X_n$ est un ensemble flous de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ de fonction d'appartenance $\mu_{\mathcal{R}} : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow [0, 1]$, ou simplement $\mathcal{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelé le degré de relation entre $x_1, x_2, \dots, x_n$.*

$$\mathcal{R} = \{ \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathcal{R}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \}.$$

Définition 2.5. (Relation binaire floue)[23] *Soient X et Y des ensembles non vides, une relation binaire floue $\mathcal{R}$ entre X et Y est une application de l'espace cartésien $X \times Y$ dans l'intervalle réel $[0, 1]$.*

Cas particuliers : Si $X = Y$, une relation floue $\mathcal{R}$, définie sur les deux univers X et Y est une relation binaire floue définie sur X .

Si $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ sont finis, une relation floue $\mathcal{R}$, définie sur les deux univers X et Y , peut être décrite par la matrice $M(\mathcal{R}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = (\mathcal{R}(x_i, y_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ des valeurs de sa fonction d'appartenance, les coefficients de $M(\mathcal{R})$ indiqués sur la ligne x et la colonne y ayant pour valeur $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$, pour tous x de X et y de Y .

Exemple 2.3. [17] *Soit $X = Y = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{R}$ une relation floue définie par :*

$\mathcal{R}(x, y)$	a	b	c
a	1	0.9	0.3
b	0.9	1	0.1
c	0.5	0.1	1

Exemple 2.4. *La relation floue $\mathcal{R}$ "approximativement égal a" peut être définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la fonction d'appartenance :*

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{1}{1 + (x - y)^2}.$$

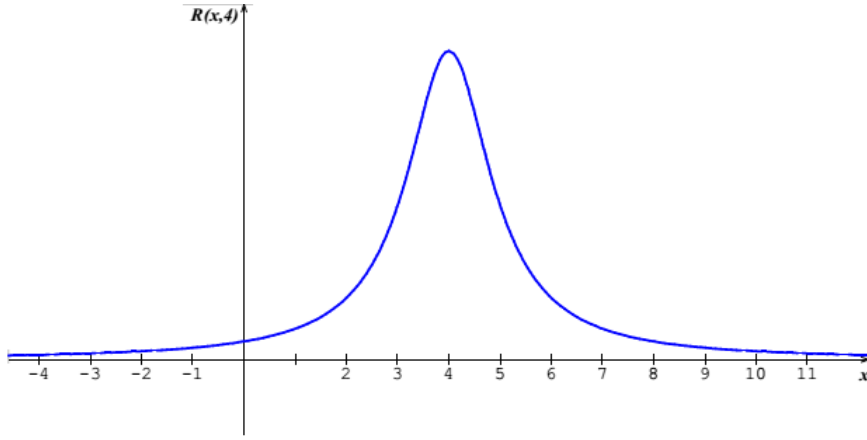


FIGURE 2.1 – x approximativement égale à 4

Pour une relation binaire floue $\mathcal{R}$ sur X , nous définissons les relations floues suivantes associées à $\mathcal{R}$:

Définition 2.6. (Inverse de la relation floue)[17] Soit $\mathcal{R}$ une relation floue entre X et Y , l'inverse de la relation floue $\mathcal{R}$ est la relation floue $\mathcal{R}^t$ entre Y et X définie par :

$$\forall y \in Y, \forall x \in X, \mathcal{R}^t(y, x) = \mathcal{R}(x, y).$$

Exemple 2.5. [17] Soit $X = \mathbb{R}$, et soit la relation floue $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{R}$ associée à la propriété $\text{Prop}(\mathcal{R}) = \text{"être beaucoup plus grand que"}$ peut être définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in X \quad \mathcal{R}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x + \lambda, \\ \left(\frac{y - x - \lambda}{\mu - \lambda} \right) & \text{si } x + \lambda < y < x + \mu, \\ 1 & \text{si } y \geq x + \mu. \end{cases}$$

$$\lambda, \mu > 0, \lambda < \mu$$

La relation inverse de la relation binaire floue $\mathcal{R}$ est une relation floue $\mathcal{R}^t$ associée à la propriété $\text{Prop}(\mathcal{R}^t) = \text{"être beaucoup plus petite que"}$ de fonction d'appartenance définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in X \quad \mathcal{R}^t(y, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq y - \lambda, \\ \left(\frac{y - x - \lambda}{\mu - \lambda} \right) & \text{si } y - \mu < x < y - \lambda, \\ 1 & \text{si } x \leq y - \mu. \end{cases}$$

$$\lambda, \mu > 0, \lambda < \mu$$

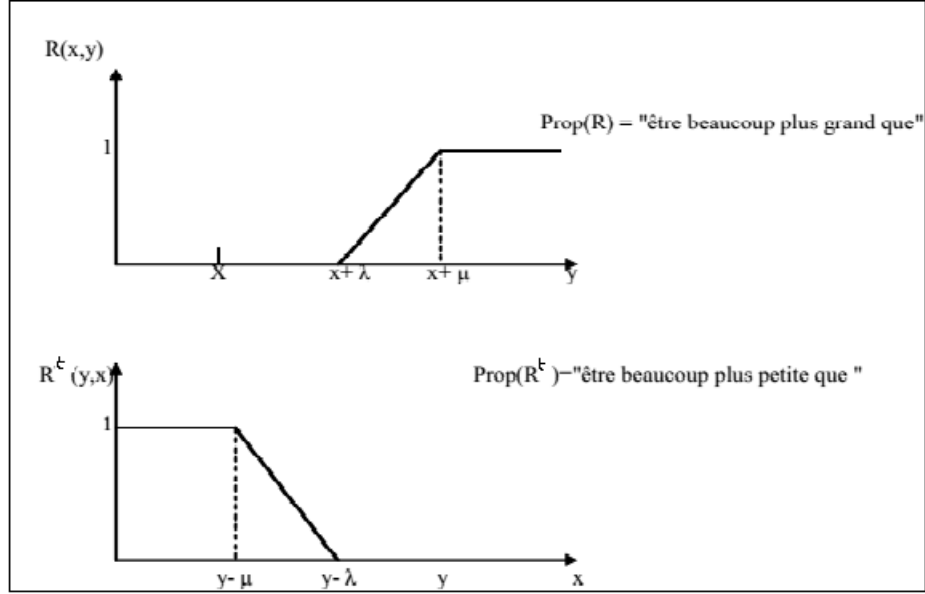


FIGURE 2.2 – Exemples de représentation des relations flous

Définition 2.7. (*Complément d'une relation floue*)[10] Soit $\mathcal{R}$ une relation floue entre X et Y , le complément de la relation floue $\mathcal{R}$ est la relation floue $\mathcal{R}^c$ entre Y et X définie par :

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \mathcal{R}^c(x, y) = 1 - \mathcal{R}(x, y).$$

Exemple 2.6. [17] Soit $X = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{R}$ une relation binaire floue définie sur X comme :

$\mathcal{R}(x, x)$	a	b	c
a	0.1	0.2	0.1
b	0.4	0.5	0.2
c	0.3	0.4	0.3

Alors $\mathcal{R}^c(x, y) = 1 - \mathcal{R}(x, y)$ définie par :

$\mathcal{R}^c(x, x)$	a	b	c
a	0.9	0.8	0.9
b	0.6	0.5	0.8
c	0.7	0.6	0.7

Définition 2.8. (Dual d'une relation floue)[10] Soit $\mathcal{R}$ une relation floue entre X et Y , le dual de la relation floue $\mathcal{R}$ est la relation floue $\mathcal{R}^d$ entre Y et X définie par :

$$\forall y \in Y, \forall x \in X, \mathcal{R}^d(x, y) = 1 - \mathcal{R}(y, x).$$

Si $\mathcal{R}$ est considérée comme une relation de préférence faible, alors $\mathcal{R}$ est une modélisation significative associée à $\mathcal{R}$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}^d = (\mathcal{R}^t)^c$, $(\mathcal{R}^d)^d = \mathcal{R}$.

Exemple 2.7. [10] Soit $X = Y = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{R}$ une relation floue définie par :

$\mathcal{R}(x, y)$	a	b	c
a	1	1	1
b	α	1	1
c	γ	β	1

Où $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$. Nous avons

$\mathcal{R}^d(x, y)$	a	b	c
a	0	$1 - \alpha$	$1 - \gamma$
b	0	0	$1 - \beta$
c	0	0	0

Définition 2.9. (Les α -coupes d'une relation floue)[17] Soit $\mathcal{R} : X^2 \longrightarrow [0, 1]$ une relation floue, un α -coupe de $\mathcal{R}$ est un ensemble classique (relation ordinaire) $\mathcal{R}_\alpha$ de X^2 , tel que

$$\mathcal{R}_\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha, \\ 0 & \text{si } \mathcal{R}(x, y) < \alpha. \end{cases}$$

Exemple 2.8. [17] Les relations floues $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ données par les matrices suivantes :

$\mathcal{R}(x, y)$	x	y	z
x	1	0.2	0.8
y	0.2	1	0.5
z	0.8	0.5	1

$\mathcal{S}(x, y)$	x	y	z
x	0.2	1	0.4
y	0	0.6	0.3
z	0	1	0.3

Admettent les 0.5-coupes $\mathcal{R}_{0.5}$ et $\mathcal{S}_{0.5}$ suivantes :

$\mathcal{R}_{0.5}(x, y)$	x	y	z
x	1	0	1
y	0	1	0
z	0	1	1

$\mathcal{S}_{0.5}(x, y)$	x	y	z
x	0	1	0
y	0	1	0
z	0	1	0

Remarque 2.1. Les relations floues étant des cas particuliers des ensembles flous, toutes les propriétés et définitions concernant les ensembles flous restent applicables, ainsi par exemple la définition de la hauteur, le support ou le noyau d'une relation floue.

Exemple 2.9. D'après l'exemple 2.3, on remarque que :

- (1) $\text{Supp}(\mathcal{R}) = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, x), (y, y), (y, z), (z, x), (z, y), (z, z)\},$
- (2) $H(\mathcal{R}) = 1$ donc $\mathcal{R}$ est normalisé,
- (3) $\text{Noy}(\mathcal{R}) = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}.$

Nous utilisons la même notation pour la relation L -floue que pour les relations classiques, une relation L -floue entre deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une forme $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ à L . Une telle relation $\mathcal{R}$ est notée $\mathcal{R} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$. Là encore, les relations classiques peuvent être décrites comme relation L -flou où $L = \mathcal{B}$. et tout ce qui suit s'applique également aux relations classiques dans ce cadre. Nous pouvons résumer les trois versions des relations en fonction de leur fonction caractéristique comme suite : [3]

Relation classique : $\mathcal{R} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$

Relation floue : $\mathcal{R} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$

Relation L -floue : $\mathcal{R} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow L$.

Définition 2.10. Une relation L -floue $\mathcal{R}$ entre X et Y est aussi un ensemble L -floue sur le produit cartésien $X \times Y$.

Définition 2.11. Une relation binaire L -flou (une L -relation pour faire court) sur X est une application $\mathcal{R} \in L^{X \times X}$, c'est-à-dire des L -ensembles de X fois X . Pour chaque $x, y \in X$, la valeur $\mathcal{R}(x, y)$ est appelée le degré de l'appartenance de (x, y) dans $\mathcal{R}$, et l'égalité, l'inclusion, rejoint, se rencontre et l'ordre des relations floues sont définies comme pour les ensembles flous. La transposition $\mathcal{R}^t$ de $\mathcal{R}$ est la L -relation sur X définie par $\mathcal{R}^t(y, x) = \mathcal{R}(x, y)$. Pour les relations nettes, nous utilisons la notation infix habituelle, par exemple nous écrivons $a \leq b$ au lieu de $\leq(a, b)$.

2.3 Opérations sur les relations floues

Puisqu'une relation floue entre X et Y est un ensemble flou défini sur l'univers du discours produit $X \times Y$, les opérations définies sur les ensembles flous permettent de définir des opérations de combinaison des relations floues. Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux relations floues définies entre X et Y , l'union $\mathcal{R} \cup \mathcal{Q}$, l'intersection $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$, le complémentaire $\mathcal{R}^c$, l'égalité $\mathcal{R} = \mathcal{Q}$ et l'inclusion $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$, sont définies par les relations suivantes : [20]

- (i) $\mathcal{R}^c(x, y) = 1 - \mathcal{R}(x, y)$,
- (ii) $\forall x \in X, \forall y \in Y, \mathcal{R} = \mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{R}(x, y) = \mathcal{Q}(x, y)$,
- (iii) $\forall x \in X, \forall y \in Y, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{Q}(x, y)$,
- (iv) $(\mathcal{R} \cup \mathcal{Q})(x, y) = \{\langle (x, y), \max(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{Q}(x, y)) \rangle\} = \{\langle (x, y), \mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{Q}(x, y) \rangle\}$,
- (v) $(\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})(x, y) = \{\langle (x, y), \min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{Q}(x, y)) \rangle\} = \{\langle (x, y), \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{Q}(x, y) \rangle\}$.

Proposition 2.2. [19] Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ trois relations floues de $X \times Y$ alors

- (1) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}^t \subseteq \mathcal{P}^t$.
- (2) $(\mathcal{R} \cup \mathcal{P})^t = \mathcal{R}^t \cup \mathcal{P}^t$.
- (3) $(\mathcal{R} \cap \mathcal{P})^t = \mathcal{R}^t \cap \mathcal{P}^t$.
- (4) $(\mathcal{R}^t)^t = \mathcal{R}$.
- (5) $\mathcal{R} \cap (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = (\mathcal{R} \cap \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})$ et $\mathcal{R} \cup (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) = (\mathcal{R} \cup \mathcal{P}) \cap (\mathcal{R} \cup \mathcal{Q})$.
- (6) $\mathcal{R} \cup \mathcal{P} \supseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \cup \mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$.
- (7) Si $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{P}$ et $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R} \supseteq \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$,
Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ et $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Démonstration. (1) Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ alors $\mathcal{R}^t(y, x) = \mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{P}(x, y) = \mathcal{P}^t(x, y)$ pour tous x, y de $X \times Y$, Donc $\mathcal{R}^t \subseteq \mathcal{P}^t$;

(2) On a

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R} \cup \mathcal{P})^t(x, y) &= (\mathcal{R} \cup \mathcal{P})(x, y) \\
 &= \mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{P}(x, y) \\
 &= \mathcal{R}^t(y, x) \vee \mathcal{P}^t(y, x) \\
 &= (\mathcal{R}^t \cup \mathcal{P}^t)(y, x)
 \end{aligned}$$

(5) Nous emploierons que les opérateurs $\vee, \wedge$ satisfait les propriétés de distribution, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} \cap (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})(x, y) &= \mathcal{R}(x, y) \wedge (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})(x, y) \\
&= \mathcal{R}(x, y) \wedge (\mathcal{P}(x, y) \vee \mathcal{Q}(x, y)) \\
&= (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{P}(x, y)) \vee (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{Q}(x, y)) \\
&= (\mathcal{R} \cap \mathcal{P})(x, y) \vee (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})(x, y) \\
&= (\mathcal{R} \cap \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})(x, y)
\end{aligned}$$

On utilise la même façon pour démontrer les propriétés qui restent. Nous pouvons généraliser les opérateurs entre les relations floues binaires, nous employons les t-normes et les t-conormes sur $[0, 1]$, Pour T un t-norme et son duale t-conorme S on a :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})(x, y) &= T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{Q}(x, y)), \\
(\mathcal{R} \cup \mathcal{Q})(x, y) &= S(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{Q}(x, y)).
\end{aligned}$$

□

2.4 Compositions de relations floues

On peut également définir des opérations de combinaison de relations floues lorsque les univers du discours sont distincts. Cela permet de déduire une relation entre les univers du discours X et Z lorsqu'on connaît des relations existant entre X et Y d'une part et Y et Z d'autre part. Pour plus de détail voir [3].

Définition 2.12. (La composition Max-Min) Soit $\mathcal{R}_1 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(Y, Z)$ des relations floues. Alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Z)$ définies par

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2(x, z) = \bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}_1(x, y) \wedge \mathcal{R}_2(y, z),$$

est appelé **la composition max-min** des relations floues $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

Remarque 2.2. la composition max-min est bien définie étant le supremum d'un ensemble borné non vide de nombres réels. Si $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(X, X)$ alors on peut définir $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, et généralement $\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{n-1}$, $n \geq 2$. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, $Z = \{z_1, \dots, z_p\}$

être des ensembles finis. Si $\mathcal{R} = (r_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{F}(X, Y)$, et $\mathcal{S} = (s_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ sont des relations floues discrètes puis la composition $\mathcal{T} = (t_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \in \mathcal{F}(X, Z)$ est donnée par

$$t_{ik} = \bigvee_{j=1}^m r_{ij} \wedge s_{jk},$$

$i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$.

Exemple 2.10. Considérons les relations floues $\mathcal{R}_1 \subseteq X \times Y$ et $\mathcal{R}_2 \subseteq Y \times Z$ définies par ses matrices suivantes

$\mathcal{R}_1(x, y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.3	0.7	0.2
x_2	1	0	0.9

$\mathcal{R}_2(y, z)$	z_1	z_2
y_1	0.8	0.3
y_2	0.1	0
y_3	0.5	0.6

Le composé des relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est le suivant

$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2(x, z)$	z_1	z_2
x_1	0.3	0.3
x_2	0.8	0.6

Proposition 2.3. (i) La composition max-min est un associative, c'est-à-dire

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{P}) \circ \mathcal{Q} = \mathcal{R} \circ (\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}),$$

où $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(X, Y)$, $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ et $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(Z, U)$.

(ii) Soit $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Si $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$ alors

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P} \leq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{P}.$$

Démonstration. (i) Nous avons

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R} \circ \mathcal{P}) \circ \mathcal{Q}(x, u) &= \bigvee_{z \in Z} (\mathcal{R} \circ \mathcal{P})(x, z) \wedge \mathcal{Q}(z, u) \\
&= \bigvee_{z \in Z} \left[\left(\bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)) \right) \wedge \mathcal{Q}(z, u) \right] \\
&= \bigvee_{z \in Z} \left[\bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}(x, y) \wedge (\mathcal{P}(y, z) \wedge \mathcal{Q}(z, u)) \right] \\
&= \bigvee_{y \in Y} \left[\bigvee_{z \in Z} \mathcal{R}(x, y) \wedge (\mathcal{P}(y, z) \wedge \mathcal{Q}(z, u)) \right] \\
&= \bigvee_{y \in Y} \left[\mathcal{R}(x, y) \wedge \bigvee_{z \in Z} (\mathcal{P}(y, z) \wedge \mathcal{Q}(z, u)) \right] \\
&= \bigvee_{y \in Y} \left[\mathcal{R}(x, y) \wedge \bigvee_{z \in Z} (\mathcal{P}(y, z) \circ \mathcal{Q}(z, u)) \right] \\
&= \mathcal{R} \circ (\mathcal{P} \circ \mathcal{Q})(x, u).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}_1(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z) \\
&\leq \bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}_2(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z) = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{P}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. Soit $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ nous avons

$$(i) \quad (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{P} = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{P}).$$

$$(ii) \quad (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{P}).$$

Démonstration. (i) Nous prouvons l'égalité par double inclusion.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{P}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z) \\
&= \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)) \cup (\mathcal{R}_2(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)) \\
&\leq \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)) \cup \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_2(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{P}).$$

D'autre part, former la proposition précédente, nous avons $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{P}$ et $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{P}$, et puis

$$(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{P}) \leq (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{P}.$$

En combinant les deux inégalités, la conclusion requise suit.

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{P}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)) \cap (\mathcal{R}_2(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)) \\ &\leq \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)) \cap \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_2(x, y) \wedge \mathcal{P}(y, z)) \\ &= (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{P})(x, z). \end{aligned}$$

□

Définition 2.13. (La composition Min-Max) Soit $\mathcal{R}_1 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(Y, Z)$ des relations floues. Alors $\mathcal{R}_1 \bullet \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Z)$ définies par

$$\mathcal{R}_1 \bullet \mathcal{R}_2(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} \mathcal{R}_1(x, y) \vee \mathcal{R}_2(y, z),$$

est appelé **la composition min-max** des relations floues $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

Exemple 2.11. Considérons les relations floues $\mathcal{R}_1 \subseteq X \times Y$ et $\mathcal{R}_2 \subseteq Y \times Z$ définies par ses matrices suivantes

$\mathcal{R}_1(x, y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.3	0.7	0.2
x_2	1	0	0.9

$\mathcal{R}_2(y, z)$	z_1	z_2
y_1	0.8	0.3
y_2	0.1	0
y_3	0.5	0.6

Le composé des relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est le suivant

$\mathcal{R}_1 \bullet \mathcal{R}_2(x, z)$	z_1	z_2
x_1	0.5	0.3
x_2	0.1	0

Proposition 2.5. (i) La composition max-min est un associative, c'est-à-dire, pour tous $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(X, Y)$, $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ et $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(Z, U)$ nous avons

$$(\mathcal{R} \bullet \mathcal{P}) \bullet \mathcal{Q} = \mathcal{R} \bullet (\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q}).$$

(ii) Soit $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Si $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$ alors

$$\mathcal{R}_1 \bullet \mathcal{P} \leq \mathcal{R}_2 \bullet \mathcal{P}.$$

Démonstration. Cette preuve est la même que la preuve de la Proposition 2.3 □

Proposition 2.6. Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ nous avons

(i) $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \bullet \mathcal{P} = (\mathcal{R}_1 \bullet \mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}_2 \bullet \mathcal{P}).$

(ii) $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \bullet \mathcal{P} \geq (\mathcal{R}_1 \bullet \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R}_2 \bullet \mathcal{P}).$

Démonstration. La preuve de la proposition est similaire au résultat correspondant dans le cas de la composition min-max et est laissée en exercice. □

2.5 Extension de compositions des relations floues

Dans cette section, nous avons présenté la généralisation de compositions des relations floues. Pour plus de détail voir [3].

Définition 2.14. (La composition Max-t-Norme) La composition max-min peut être généralisée naturellement à des compositions Max-t-normes

$$\mathcal{R}_1 \circ_T \mathcal{R}_2(x, z) = \bigvee_{y \in Y} T(\mathcal{R}_1(x, y), \mathcal{R}_2(y, z)),$$

où T est une t-normes arbitraire.

Proposition 2.7. (i) La composition max-t-Norme est associative, c'est-à-dire

$$(\mathcal{R} \circ_T \mathcal{P}) \circ_T \mathcal{Q} = \mathcal{R} \circ_T (\mathcal{P} \circ_T \mathcal{Q}),$$

où $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(X, Y)$, $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ et $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(Z, U)$.

(ii) Soit $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Si $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$ alors

$$\mathcal{R}_1 \circ_T \mathcal{P} \leq \mathcal{R}_2 \circ_T \mathcal{P}.$$

Démonstration. Puisque la t-norme T est en croissant, Nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{R} \circ_T \mathcal{P}) \circ_T \mathcal{Q}(x, u) &= \bigvee_{z \in Z} \left(\bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}(x, y) T \mathcal{P}(y, z) \right) T \mathcal{Q}(z, u) \\ &= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}(x, y) T \mathcal{P}(y, z) T \mathcal{Q}(z, u) \\ &= \mathcal{R} \circ_T (\mathcal{P} \circ_T \mathcal{Q})(x, u). \end{aligned}$$

La preuve de (ii) est basée sur le fait que T est en croissant dans ses deux variables. □

Proposition 2.8. Pour toute $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ et tout t-norme T nous avons

$$(i) \quad (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ_T \mathcal{P} = (\mathcal{R}_1 \circ_T \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ_T \mathcal{P}).$$

$$(ii) \quad (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \circ_T \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \circ_T \mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ_T \mathcal{P}).$$

Démonstration. (i) Puisque T est distributif par rapport à $\cup$ nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ_T \mathcal{P}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)(x, y) T \mathcal{P}(y, z) \\ &\leq \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1(x, y) T \mathcal{P}(y, z)) \cup \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_2(x, y) T \mathcal{P}(y, z)), \end{aligned}$$

Aussi, $\mathcal{R}_1 \circ_T \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ_T \mathcal{P}(x, z)$ et $\mathcal{R}_2 \circ_T \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ_T \mathcal{P}(x, z)$, et alors

$$(\mathcal{R}_1 \circ_T \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ_T \mathcal{P}) = (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ_T \mathcal{P}.$$

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \circ_T \mathcal{P}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)(x, y) T \mathcal{P}(y, z) \\ &\leq \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1(x, y) T \mathcal{P}(y, z)) \cap \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_2(x, y) T \mathcal{P}(y, z)) \\ &= (\mathcal{R}_1 \circ_T \mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ_T \mathcal{P})(x, z). \end{aligned}$$

□

Définition 2.15. (*La composition Min-t-Conorme*) La composition min-max peut être généralisée naturellement à des compositions min-t-conormes

$$\mathcal{R}_1 \bullet_S \mathcal{R}_2(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} S(\mathcal{R}_1(x, y), \mathcal{R}_2(y, z)),$$

où S est une t -conorme arbitraire.

Proposition 2.9. (i) La composition max-t-Conorme est un associative, c'est-à-dire

$$(\mathcal{R} \bullet_S \mathcal{P}) \bullet_S \mathcal{Q} = \mathcal{R} \bullet_S (\mathcal{P} \bullet_S \mathcal{Q}),$$

où $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(X, Y)$, $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ et $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(Z, U)$.

(ii) Soit $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Si $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$ alors

$$\mathcal{R}_1 \bullet_S \mathcal{P} \leq \mathcal{R}_2 \bullet_S \mathcal{P}.$$

Démonstration. Puisque la t -conorme S est en croissant, Nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{R} \bullet_S \mathcal{P}) \bullet_S \mathcal{Q}(x, u) &= \bigvee_{z \in Z} \left(\bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}(x, y) S \mathcal{P}(y, z) \right) S \mathcal{Q}(z, u) \\ &= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} \mathcal{R}(x, y) S \mathcal{P}(y, z) S \mathcal{Q}(z, u) \\ &= \mathcal{R} \bullet_S (\mathcal{P} \bullet_S \mathcal{Q})(x, u). \end{aligned}$$

La preuve de (ii) est basée sur le fait que S est en croissant dans ses deux variables.

□

Proposition 2.10. Pour toute $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(Y, Z)$ et tout t -norme S nous avons

$$(i) \quad (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \bullet_S \mathcal{P} = (\mathcal{R}_1 \bullet_S \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R}_2 \bullet_S \mathcal{P}),$$

$$(ii) \quad (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \bullet_S \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \bullet_S \mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}_2 \bullet_S \mathcal{P}).$$

Démonstration

(i) Puisque S est distributif par rapport à $\cup$ nous avons

$$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \bullet_S \mathcal{P}(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)(x, y) S \mathcal{P}(y, z)$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1(x, y) \mathbin{S} \mathcal{P}(y, z)) \cup \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_2(x, y) \mathbin{S} \mathcal{P}(y, z)),$$

Aussi, $\mathcal{R}_1 \bullet_S \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \bullet_S \mathcal{P}(x, z)$ et $\mathcal{R}_2 \bullet_S \mathcal{P} \leq (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \bullet_S \mathcal{P}(x, z)$, et alors

$$(\mathcal{R}_1 \bullet_S \mathcal{P}) \cup (\mathcal{R}_2 \bullet_S \mathcal{P}) = (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \bullet_S \mathcal{P}.$$

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \bullet_S \mathcal{P}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)(x, y) \mathbin{S} \mathcal{P}(y, z) \\ &\leq \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_1(x, y) \mathbin{S} \mathcal{P}(y, z)) \cap \bigvee_{y \in Y} (\mathcal{R}_2(x, y) \mathbin{S} \mathcal{P}(y, z)) \\ &= (\mathcal{R}_1 \bullet_S \mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}_2 \bullet_S \mathcal{P})(x, z). \end{aligned}$$

2.6 Propriétés de relations floues

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire floue sur X [4].

- **Réflexivité** : $\mathcal{R}(x, x) = 1$ pour tout $x \in X$,
- **Irréflexivité** : $\mathcal{R}(x, x) = 0$ pour tout $x \in X$,
- **Symétrie** : $\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$ pour tous $x, y \in X$,
- **Asymétrie** : $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) = 0$ pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$,
- **T-asymétrie** : $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) = 0$ pour tous $x, y \in X$,
- **Antisymétrie** : $x \neq y$ implique $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) = 0$ pour tous $x, y \in X$,
- **T-antisymétrie** : $x \neq y$ implique $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) = 0$,
- **Transitivité** : $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \leq \mathcal{R}(x, z)$ pour tous $x, y, z \in X$,
- **T-transitivité** : $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)) \leq \mathcal{R}(x, z)$ pour tous $x, y, z \in X$,
- **Séparabilité** : $\mathcal{R}(x, x) = 1$ implique que $x = y$ pour tous $x, y \in X$,
- **Linéaire (ou complet)** : $\max(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) = 1$ pour tous $x, y \in X$,

Les L-relations binaires qui sont réflexives et symétriques sont appelées L-tolérances floues, et les T-transitive et L-tolérances sont appelées L-équivalences. Une L-équivalence séparable est appelée L-égalité. Notez que 2-égalité sur X est précisément l'égalité habituelle (*identit*) id_X , c-à-d $id_X(x, y) = 0$ pour $x \neq y$. La notion de L-égalité est une généralisation naturelle du notion classique (*bivalente*).

Définition 2.16. (*Continu à gauche*)[19] Pour un t -norme T continu à gauche, l'implication résiduelle $\tilde{T}$ est définie comme $(x, y \in [0, 1])$,

$$\tilde{T}(x, y) = \sup\{\mu \in [0, 1] \mid T(\mu, x) \leq y\}$$

2.7 Classes particulières de relation floue

Ce sont deux types de relations qui apparaissent souvent en mathématiques : les relations d'ordre et les relations d'équivalence. Une relation d'ordre est une généralisation de l'inclusion d'ensemble et de la relation d'ordre sur la ligne réelle. Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et concepts dont nous aurons besoin dans la suite. Pour plus de détail voir ([4], [6], [17], [23]).

2.7.1 Relation d'équivalence floue

Dans cette section, nous rappelons les définitions de base et propriétés des relation d'équivalence floue et que cette dernière faire une partition sur un ensemble quelconque.

Définition 2.17. (*Relation d'équivalence floue*)[23] Une relation d'équivalence floue (relation de similarité) E sur X est une relation floue qui est :

- (a) *Réflexive* : $E(x, x) = 1$ pour tout $x \in X$,
- (b) *Symétrique* : $E(x, y) = E(y, x)$ pour tous $x, y \in X$,
- (c) *Transitive* : $E(x, z) \geq (E(x, y) \wedge E(y, z))$ pour tous $x, y, z \in X$.

Exemple 2.12. [23] Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, et soit E l'ensemble flou définit par la matrice suivante

E	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0.2	1	0.6	0.2	0.6
x_2	0.2	1	0.2	0.2	0.8	0.2
x_3	1	0.2	1	0.6	0.2	0.6
x_4	0.6	0.2	0.6	1	0.2	0.8
x_5	0.2	0.8	0.2	0.2	1	0.2
x_6	0.6	0.2	0.6	0.8	0.2	1

Alors, E est une relation d'équivalence floue.

Proposition 2.11. [17] Pour tout seuil α choisi dans $]0, 1]$, la relation R_α de niveau α associée à une relation de relation d'équivalence flou est une relation d'équivalence classique sur x .

Définition 2.18. (Classes d'équivalences)[23] Soit E une relation d'équivalence floue dans $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ caractérisé par une fonction d'appartenance $E(x_i, x_j)$ tel que $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour chaque x_i on associe une classe d'équivalence $E[x_i]$ ou simplement $[x_i]$, cette classe est un ensemble flou de X qui est caractérisé par sa fonction d'appartenance $\mu_{E[x_i]}(x_j) = E(x_i, x_j)$.

Exemple 2.13. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ et soit E la relation d'équivalence floue qui est défini dans l'exemple 2.12 on a :

$$E[x_1] = \{(x_1, 1), (x_2, 0.2), (x_3, 1), (x_4, 0.6), (x_5, 0.2), (x_6, 0.6)\},$$

$$E[x_2] = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.8), (x_3, 0.2), (x_4, 0.2), (x_5, 1), (x_6, 0.2)\}.$$

Proposition 2.12. [17] Quand α varie de 0 à 1, les relations de niveau α associées à une relation d'équivalence flou $\mathcal{R}$ sur X constituent des partitions emboîtées de X , dont les classes sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_\alpha$.

Exemple 2.14. [17] Soit l'ensemble de référence $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et une relation binaire floue E sur X dont la fonction d'appartenance est définie par la matrice suivante, et dont on montre que $E = E \circ E$:

E	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.3	0.9	0.5
x_2	0.3	1	0.3	0.3
x_3	0.9	0.3	1	0.5
x_4	0.5	0.3	0.5	1

On obtient 4 relations de niveau α différentes associées à E , dont on vérifie que ce sont des relations d'équivalence, avec $E_{0.1} = E_{0.2} = E_{0.3}$, $E_{0.4} = E_{0.5}$, $E_{0.6} = E_{0.7} = E_{0.8} = E_{0.9}$, définies de la façon suivante :

$E_{0.3}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1

$E_{0.5}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	0
x_3	1	0	1	1
x_4	1	0	1	1

$E_{0.9}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0
x_3	1	0	1	0
x_4	0	0	0	1

E_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	0	1

On observe alors que tous les éléments de X sont en relation par $E_{0.3}$ qui possède donc une seule classe d'équivalence. Les éléments de X en relation par $E_{0.5}$ sont $\{x_1, x_3, x_4\}$ d'un part, $\{x_2\}$ d'autre part. Ceux qui sont en relation avec $E_{0.9}$ sont $\{x_1, x_3\}, \{x_2\}$ et $\{x_4\}$, qui en constituent donc les classes d'équivalence. Les classes d'équivalences de E_1 sont les singletons de X . On peut alors construire l'arbre de partitions associé à la relation d'équivalence floue E indiqué sur la figure 2.3.

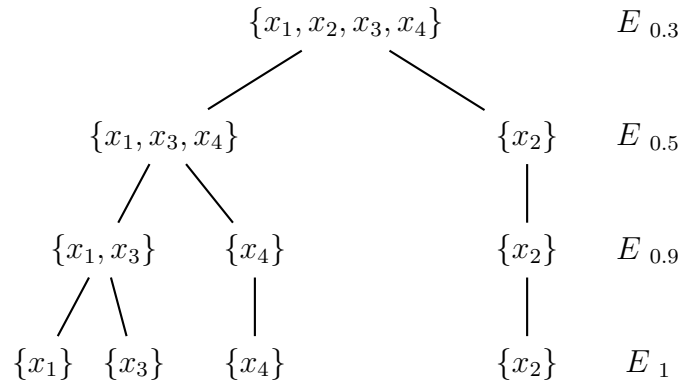


FIGURE 2.3 – "L'arbre de partition associée à une relation d'équivalence floue"

Des relations similaires ont été introduites dans le but d'étendre les relations classiques. L'idée principale pour le faire est de généraliser le concept de transit en utilisant le t-norme, comme suit :

Définition 2.19. (*T*-équivalence floue)[4] Une application $E : X^2 \longrightarrow [0, 1]$ s'appelle une relation d'équivalence floue sur X par rapport à une t-norme T , pour la brièveté *T*-équivalence, si elle a les propriétés suivantes :

- (i) $\forall x \in X : E(x, x) = 1$ (reflexivité),
- (ii) $\forall x, y \in X : E(x, y) = E(y, x)$ (symétrie),

(iii) $\forall x, y, z \in X : T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z)$ (T -transitivité).

Une relation T -équivalence floue E sur X est dite séparable (c'est à dire T -égalité floue) si l'implication suivante est vérifiée : $E(x, y) = 1 \Rightarrow x = y$ pour tout $x, y \in X$.

2.7.2 Relation d'ordre floue

L'autre grande classe de relations floues possédant des propriétés spécifiques constitue une extension des relations d'ordres floues. Dans ce que suit nous devons définir plusieurs types fondamentaux de l'ordre flou qui seront nécessaires tout au long de cette travail.

Définition 2.20. (*Relation d'ordre flou partiel*)[8] Une relation binaire floue $\mathcal{R}$ sur X est appelé relation d'ordre flou partiel si les conditions suivantes sont vérifiées

- (a) *Réflexive*, pour tout $x \in X, \mathcal{R}(x, x) = 1$,
- (b) *Antisymétrique*, pour tous $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) = 0$,
- (c) *Transitive*, pour tous $x, y, z \in X, \mathcal{R}(x, z) \geq (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z))$. Si $\mathcal{R}$ une relation d'ordre flou partiel sur X , alors le couple $(X, \mathcal{R})$ est appelé **ensemble partiellement ordonné flou**.

Exemple 2.15. Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$, l'ensemble flou définit sur X par la matrice suivante :

$\mathcal{R}$	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0.6	0.4
b	0	1	0	0.6	0.6
c	0	0	1	0	0.6
d	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	1

Alors, $\mathcal{R}$ est un ordre flou partiel sur X .

Théorème 2.1. (*Caractérisation des ordres flous par ses α -coupes*)[8] Une relation $\mathcal{R} : X^2 \longrightarrow L$ est un ordre flou, si est seulement si, tous ses α -coupes (sauf le 0-coupe) sont des ordres classiques.

Démonstration

($\Rightarrow$)

Soit $\mathcal{R} : X^2 \longrightarrow L$ une relation d'ordre floue.

(1) Montrons que $\mathcal{R}_\alpha$ est réflexive.

Soit $\alpha \in L - \{0\}$ et $x \in X$. On a : $\mathcal{R}(x, x) = 1 \geq \alpha$, $\forall x \in X$, donc $(x, x) \in \mathcal{R}_\alpha$, alors $\mathcal{R}_\alpha$ est réflexive.

(2) Montrons également que $\mathcal{R}_\alpha$ est antisymétrique.

Soient $\alpha \in L - \{0\}$, $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{R}_\alpha \text{ et } (y, x) \in \mathcal{R}_\alpha &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha \text{ et } \mathcal{R}(y, x) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) \neq 0 \text{ (car } \mathcal{R} \text{ est antisymétrique)} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}_\alpha$ est antisymétrique.

(3) On va montrer la transitivité de $\mathcal{R}_\alpha$. Soient $\alpha \in L - \{0\}$, $x, y, z \in X$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{R}_\alpha \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}_\alpha &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha \text{ et } \mathcal{R}(y, z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, z) \geq \alpha \text{ (car } \mathcal{R} \text{ est transitive)} \\ &\Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}_\alpha. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{R}_\alpha$ est transitive. Alors, $\mathcal{R}_\alpha$ est une relation d'ordre classique.

($\Leftarrow$)

Inversement on suppose que $\forall \alpha \in L - \{0\}$, les α -coupes de $\mathcal{R}$ sont des relations d'ordres classiques et montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre flou.

(1) La réflexivité ; Soit $\alpha \in L - \{0\}$ et $x \in X$,

$$(x, x) \in \mathcal{R}_\alpha \Rightarrow \mathcal{R}(x, x) \geq \alpha, \forall \alpha \in L - \{0\}, \text{ donc } \mathcal{R}(x, x) = 1, \mathcal{R} \text{ est réflexive.}$$

(2) L'antisymétrie ; Soit $\alpha \in L - \{0\}$ et soient $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} x \neq y &\Rightarrow (x, y) \notin \mathcal{R}_\alpha \text{ ou } (y, x) \notin \mathcal{R}_\alpha, \forall \alpha \in L - \{0\} \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) < \alpha \text{ ou } \mathcal{R}(y, x) < \alpha, \forall \alpha \in L - \{0\} \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) < \alpha, \forall \alpha \in L - \{0\} \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) = 0. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

(3) La transitivité ; Soit $\alpha \in L - \{0\}$ et soient $x, y, z \in X$, on pose $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) = \alpha$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) = \alpha &\Rightarrow \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha \text{ et } \mathcal{R}(y, z) \geq \alpha \\
&\Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_\alpha \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}_\alpha \\
&\Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}_\alpha \text{ (car } \mathcal{R}_\alpha \text{ est transitive)} \\
&\Rightarrow \mathcal{R}(x, z) \geq \alpha \\
&\Rightarrow \mathcal{R}(x, z) \geq \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z)
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{R}$ est transitive. D'où, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre floue.

Définition 2.21. (Pré-ordre flou)[23] Un pré-ordre flou est une relation binaire floue $\mathcal{R}$ réflexive et transitive.

Exemple 2.16. Soit $X = \{a, b, c, d\}$, l'ensemble flou définit sur X par la matrice suivante :

$\mathcal{R}$	a	b	c	d
a	1	0.8	1	0.8
b	0.2	1	0.2	0.2
c	1	0.8	1	0.8
d	0.6	0.9	0.6	1

Est un pré-ordre flou sur X .

Définition 2.22. (Ordre flou strict)[23] Un ordre flou $\mathcal{R}$ est une relation floue dans X qui est irréflexive et transitive.

Exemple 2.17. Soit $X = \{a, b, c, d\}$, l'ensemble flou définit sur X par la matrice suivante :

$\mathcal{R}$	a	b	c	d
a	1	0.8	1	0.8
b	0.1	0	0.1	0.1
c	1	0.8	1	0.8
d	0.5	0.9	0.6	1

Alors, $\mathcal{R}$ est un ordre flou strict sur X .

Définition 2.23. (Ordre flou total)[23] Une relation d'ordre flou $\mathcal{R}$ sur X est dite **ordre flou total** si $\mathcal{R}(x, y) > 0$ ou $\mathcal{R}(y, x) > 0$ pour tout $x, y \in X$. Si $\mathcal{R}$ une relation d'ordre flou total sur X , alors le couple $(X, \mathcal{R})$ est appelé **ensemble totalement ordonné flou** (ou bien **chaîne floue**).

Exemple 2.18. Soit $\mathcal{R}$ une relation flou sur $X = \{x, y, z\}$ donné par :

$\mathcal{R}(x, x)$	x	y	z
x	1	0.6	0.6
y	0	1	0.4
z	0	0	1

$\mathcal{R}$ est un ordre flou total.

Remarque 2.3. Les relations floues remplissant seulement la réflexivité et T -transitivité sont appelées **pré-ordres** par rapport à t -norme T , en abrégé **T -pré-ordres**.

Définition 2.24. (Ordre flou faible) Un ordre flou faible par rapport à t -norme T donnée (ou un T -Ordre flou faible) est une T -pré-ordre flou qui est linéaire.

Exemple 2.19. Soit T une t -norme continue à gauche. Alors

$$\mathcal{T}(x \setminus y) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid T(x, \alpha) \leq y\}$$

définit un T -pré-ordre flou sur $X = [0, 1]$ qui est aussi un T -ordre flou faible.

Remarque 2.4. $\mathcal{T}$ est habituellement appelé le pseudo-inverse de T et d'un point de vue logique, c'est l'implication résiduelle associée à la conjonction T .

Définition 2.25. (T -ordre) Un application $R : X^2 \longrightarrow [0, 1]$ est appelé un ordre flou sur le domaine classique X non vide par rapport à une t -norme T , pour une brièveté de T -ordre, si les trois axiomes sont satisfaits :

- (i) $\forall x \in X : \mathcal{R}(x, x) = 1$ (réflexivité),
- (ii) $\forall x, y \in X : x \neq y \implies T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) = 0$ (T -antisymétrie),
- (iii) $\forall x, y, z \in X : T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)) \leq \mathcal{R}(x, z)$ (T -transitivité).

On s'attendrait naturellement à ce que les ordres flous soient des ordres linéaires nettes, considérons maintenant un ensemble ordonné linéairement X . Une exigence naturelle sur un fuzzification sonore de l'ordre linéaire original serait la monotonie suivante :

$$\forall x \in X : y \preceq z \implies \mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{R}(x, z) \quad (2.1)$$

En utilisant la réflexivité et la monotonie ci-dessus, nous obtenus que, pour $x \in X$,

$$\forall y \preceq x : \mathcal{R}(y, x) = 1.$$

Linéarité de $\preceq$ et T -antisymétrique, d'autre part, entrainer

$$\forall y \not\preceq x : \mathcal{R}(y, x) = 0,$$

et nous avons prouvé que l'ordre nette $\preceq$ lui-même est le seul ordre flou tel que la propriété (2.1) est remplie.

De plus, en considérant les ordres flous comme des modèles mathématiques de concepts comme « approximativement plus petit ou égal », ou « plus grand ou égal », on observe immédiatement qu'il existe une composante inhérente à l'incapacité de discriminer.

Cela peut entrainer la demande d'apporter ensemble des ordres flous et indissociables. Dans ce suit, une généralisation qui tient également compte de l'indistinction. pour les détails de la preuve [5].

Définition 2.26. (*T - E -ordre*) Une fonction $\mathcal{R} : X^2 \longrightarrow [0, 1]$ est appelée un ordre floue sur X par rapport à une t -norme T , et une T -équivalence E , pour une brièveté T - E -ordre, si elle remplit les trois axiomes suivants pour tous $x, y \in X$:

- (i) $\forall x \in X : E(x, x) \leq \mathcal{R}(x, x)$ (*E -réflexivité*),
- (ii) $\forall x, y \in X : T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) \leq E(x, y)$ (*T - E -antisymétrique*),
- (iii) $\forall x, y, z \in X : T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)) \leq \mathcal{R}(x, z)$ (*T -transitivité*).

Proposition 2.13. (*Quelques propriétés de base*)

- (i) Chaque T -égalité est un T - E -ordre.
- (ii) Chaque ordre classique est un ordre flou par rapport à toute t -norme et l'égalité classique.
- (iii) Si $\mathcal{R}$ est un T - E -ordre, alors sa relation dite de transposition $\mathcal{R}^t(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$ est également un T - E -ordre.

(iv) Un T_1 - E -ordre est un T_2 - E -ordre si T_1 est plus faible T_2 .

Remarque 2.5. Prenez E est un égalité nette dans la définition 2.26, nous obtenons la définition 2.25.

Théorème 2.2. Si $\mathcal{R}$ est un T - E -ordre sur l'ensemble X , alors pour tous $x, y \in X$

$$T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) \leq E(x, y) \leq \min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)).$$

Démonstration. On suppose que $\mathcal{R}$ est un T - E -ordre sur l'ensemble X , et on montre que

$$T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(x, y)) \leq E(x, y) \leq \min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(x, y)).$$

En effet, on montre que $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(x, y)) \leq E(x, y)$ par la définition de T -antisymétrique.

Et d'autre part on montre que $E(x, y) \leq \min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(x, y))$ par la définition de E -réflexivité. $\square$

Le prochain théorème montre comment définir des produits cartésiens des ordres flous.

Théorème 2.3. (*Produits cartésiens des ordres flous*) Soient $X_1, \dots, X_n$ des ensembles nets et soit T une t -norme arbitraire. Si $(\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ et $(E_1, \dots, E_n)$ sont des familles des relations floues telles que, pour tous $i = 1, \dots, n$

(i) $\mathcal{R}_i$ et E_i sont relations binaires floues sur X ,

(ii) E_i est une T -équivalence sur X ,

(iii) $\mathcal{R}_i$ est un T - E_i -ordre,

Alors la relation floue

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}} : (X_1 \times \dots \times X_n)_2 &\longrightarrow [0, 1] \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_2)) &\longmapsto \bigwedge_{i=1}^n (\mathcal{R}_i(x_i, y_i)) \end{aligned}$$

est un ordre flou par rapport à T et la relation d'équivalence floue

$$\tilde{E}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_2)) = \bigwedge_{i=1}^n E_i(x_i, y_i)$$

Est un T - $\tilde{E}$ -ordre.

Définition 2.27. (*Compatibilité dans le sens Bodenhofer*) [6] Soit $\lesssim$ est un ordre classique sur X et soit E est une relation équivalence floue sur X . E est appelée compatible avec $\lesssim$ si et seulement si l'implication suivante est valable pour tous $x, y \in X$:

$$x \lesssim y \lesssim z \Rightarrow E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z)).$$

La Compatibilité entre une ordre classique $\lesssim$ et une relation d'équivalence flou E peut être interprétée comme suit : Les deux éléments extérieurs d'une chaîne à trois éléments sont au moins aussi reconnaissables que les deux éléments intérieurs.

Par analogie avec le cas classique, étant donné un domaine X non vide

Définition 2.28. Une relation floue binaire $\mathcal{R} : X^2 \longrightarrow [0, 1]$ est un ordre faible flou (ou un T -ordre faible) si elle a les deux propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in X$, où T désigne une t -norme continue à gauche :

- (1) $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) \leq \mathcal{R}(x, z)$ (T -transitivité),
- (2) $\mathcal{R}(x, y) = 1$ ou $\mathcal{R}(y, x) = 1$ (complet).

Notez que (comme un cas précis) est un ordre faible flou sont nécessairement réflexifs, c-à-d $\mathcal{R}(x, x) = 1$ est valable pour tous $x \in X$.

On peut affirmer que le théorème suivant montre qu'un ordre faible et net peut toujours être décomposé en un ordre linéaire net et une relation d'équivalence nette.

Théorème 2.4. (*Décomposition en ordres linéaires nets et en T -équivalences*) [6] Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire floue, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\mathcal{R}$ est un T -ordre faible.
- (2) il existe un ordre linéaire classique $\preceq$ et une T -équivalence qui est compatible avec $\preceq$ tel que $\mathcal{R}$ peut être représenté comme suit :

$$\mathcal{R}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preceq y, \\ E(x, y) & \text{autrement.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Afin de prendre la relation d'équivalence floue sous-jacente dans les comptes, nous ajoutons l'extensionnalité.

Définition 2.29. (*strict T-E-ordre*) [6] Une relation binaire floue $\mathcal{R}$ sur un univers X est appelée ordre flou strict par rapport à une t -norme T et une T -équivalence E , pour la bréveté strict T - E -ordre, si elle remplit les axiomes suivants pour tous $x, x', y, y', z \in X$:

- (1) Irréflexivité : $\mathcal{R}(x, x) = 0$,
- (2) T -transitivité : $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)) \leq \mathcal{R}(x, z)$,
- (3) E -extensionnalité : $T(\mathcal{R}(x, y), T(E(x, x'), E(y, y'))) \leq \mathcal{R}(x', y')$.

Remarque 2.6. Remarquons que, sous l'hypothèse de T -transitivité, l'irréflexivité implique T -asymétrie, c-à-d que $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) = 0$ pour tous $x, y \in X$ où la réciproque T ne tient que si T n'a pas de diviseur nul. En d'autres termes, l'irréflexivité peut être remplacée de manière équivalente par T -asymétrie si T n'a pas de diviseur nul. En outre, nous pouvons conclure que $T(E(x, y), \mathcal{R}(y, x)) = 0$ est valable pour tous $x, y \in X$ et pour strict T - E -ordre $\mathcal{R}$.

Exemple 2.20. C'est un fait bien connu $E(x, y) = \max(1 - |x - y|, 0)$ est une T_L -équivalence sur $\mathbb{R}$, $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ étant la t -norme de lukasiewicz. Il est facile de montrer que $L(x, y) = \max(\min(1 - x + y, 1), 0)$ est un T - E -ordre complet et que $\mathcal{R}(x, y) = \max(\min(y - x, 1), 0)$ est un T_L - E -ordre strict.

E -extensionnalité tel que défini ci-dessus n'est rien d'autre qu'une traduction directe de affirmation croustillante trivial ($x = x'$ et $y = y'$ et $x < y$) implique que $x' < y'$. Dans le cas où E est l'égalité croquante classique, E -extensionnalité est trivialement remplie et nous finissons dans le concept plus traditionnel d'un ordre flou stricte.

2.8 Extensions linéaires d'un ordre flou

Dans cette section, on va discuter la propriété d'extension linéaire d'un T - E -ordre partiel [5].

Définition 2.30. (*Extension et le rôle de la continuité à gauche*) Considérons deux T - E -ordres $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, on dit que $\mathcal{R}_1$ étend $\mathcal{R}_2$ si $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1$, c'est à dire $\mathcal{R}_2(x, y) \leq \mathcal{R}_1(x, y)$, pour tous $x, y \in X$. Dans le cas où $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1$ on dit que $\mathcal{R}_1$ est une extension de $\mathcal{R}_2$.

On note par $Ext(\mathcal{R})$ de l'ensemble des extensions linéaires (complets), c'est à dire

$$Ext(\mathcal{R}) = \{\mathcal{R}' : T - E - \text{ordre} \mid \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'\}.$$

Un T-E-ordonnant $\mathcal{R}$ est dit maximal s'il n'existe aucun T-E-ordre $\mathcal{R}'$ tel que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, c-à-d, $Ext(\mathcal{R}) = \{\mathcal{R}\}$.

Théorème 2.5. [5] *Soit $\mathcal{R}$ un T-E-ordres. Si T est continu à gauche alors l'ensemble $Ext(\mathcal{R})$ a au moins un élément maximal.*

Démonstration 2.1. *Nous considérons une séquence arbitrairement ordonnée dans $Ext(\mathcal{R})$, c'est à dire une famille $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ telle que*

- (i) *l'ensemble d'index I est linéairement ordonné,*
- (ii) *pour tous $i \in I$, $\mathcal{R}_i \in Ext(\mathcal{R})$,*
- (iii) *$\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_j$ n'importe quand $i \leq j$.*

Maintenant nous définissons (pour tous $x, y \in X$)

$$\tilde{\mathcal{R}}(x, y) = \sup_{i \in I} \mathcal{R}_i(x, y).$$

E-réflexivité de $\tilde{\mathcal{R}}$ est trivial à prouver. Pour prouver T-E-antisymétrique, il faut prendre en compte de continuité à gauche :

$$\begin{aligned} T(\tilde{\mathcal{R}}(x, y), \tilde{\mathcal{R}}(y, x)) &= T\left(\sup_{i \in I} \mathcal{R}_i(x, y), \sup_{j \in I} \mathcal{R}_j(y, x)\right) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{j \in I} T(\mathcal{R}_i(x, y), \mathcal{R}_j(y, x)) = (*). \end{aligned}$$

Puisque la famille $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ est ordonnée linéairement, l'égalité

$$(*) = \sup_{i \in I} T(\mathcal{R}_i(x, y), \mathcal{R}_i(y, x))$$

tient, et T-antisymétrie suit former le T-E-antisymétrie de chaque $\mathcal{R}_i$. Une argumentation similaire peut être appliquée pour prouver T-transitivité :

$$\begin{aligned} T(\tilde{\mathcal{R}}(x, y), \tilde{\mathcal{R}}(y, z)) &= T\left(\sup_{i \in I} \mathcal{R}_i(x, y), \sup_{j \in I} \mathcal{R}_j(y, z)\right) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{j \in I} T(\mathcal{R}_i(x, y), \mathcal{R}_j(y, z)) \\ &= \sup_{i \in I} T(\mathcal{R}_i(x, y), \mathcal{R}_i(y, z)) \\ &\leq \sup_{i \in I} T(\mathcal{R}_i(x, z)) \\ &= \tilde{\mathcal{R}}(x, z). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons montré de manière constructive que toute séquence ordonnée linéairement dans $\text{Ext}(\mathcal{R})$ a un seul sup (supremum) dans $\text{Ext}(\mathcal{R})$. Par le lemme de Zorn, donc, l'existence d'un élément maximal dans $\text{Ext}(\mathcal{R})$ est garantie.

Maintenant, nous passons à des questions opposées, quelle est la gravité des difficultés qui surviennent si elles sont abandonnées sont continuité à gauche n'est pas satisfaite.

Proposition 2.14. *A condition que l'ensemble X comporte au moins deux éléments et que T n'est pas continué à gauche, il existe une T -équivalence E et une séquence ordonnée linéairement des T - E -ordres qui n'a pas d'un seul sup (supremum) dans l'ensemble des T - E -ordres sur X .*

Lemme 2.1. [5] *Supposons qu'on nous donne un ensemble non vide X , une T -équivalence E sur X , et un T - E -ordre $\mathcal{R}$ sur X . Ensuite, pour tout sur ensemble $X' \supset X$, il existe des relations floues E' et $\mathcal{R}'$ telles que*

- (1) *E' est une T -équivalence sur X' qui s'étend de E à X dans le sens où $E'_X|E$, c-à-dire, $E'(x, y) = E(x, y)$ pour tous $x, y \in X$.*
- (2) *$\mathcal{R}$ est une T - E' -ordre sur X' qui s'étend $\mathcal{R}$ à X dans le sens où $\mathcal{R}'|X = \mathcal{R}$, c-à-dire, $\mathcal{R}'(x, y) = \mathcal{R}(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. De plus, si $\mathcal{R}$ est un T - E -ordre maximal sur X , il existe un maximum de T - E' -ordre $\mathcal{R}''$ sur X' pour $\mathcal{R}''|X = \mathcal{R}$ lequel.*

Démonstration 2.2. *Nous définie*

$$E'(x, y) = \begin{cases} E(x, y) & \text{si } x \in X \text{ et } y \in X, \\ 1 & \text{si } x = y \notin X, \\ 0 & \text{si sinon.} \end{cases}$$

$$\mathcal{R}'(x, y) = \begin{cases} \mathcal{R}(x, y) & \text{si } x \in X \text{ et } y \in X, \\ 1 & \text{si } x = y \notin X, \\ 0 & \text{si sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que E' est une T -équivalence sur X' et $\mathcal{R}'$ est un T - E' -ordre sur X' . Les propriétés d'extension $E'_X|E = E$ et $\mathcal{R}'_X|X = \mathcal{R}$ sont également triviales par les définitions ci-dessus. Supposons maintenant que $\mathcal{R}$ est T - E -ordre maximal sur X et appliquons la construction

ci-dessus de E' et $\mathcal{R}'$. Puis, par Théorème 2.5, il existe un T - E -ordre $\mathcal{R}''$ sur X' qui est une extension maximale de $\mathcal{R}'$. Trivialement, la restriction de $\mathcal{R}''|_X$ doit être un T - E -ordre qui prolonge $\mathcal{R}$. Puis $\mathcal{R}''|_X = \mathcal{R}$ doit tenir, sinon $\mathcal{R}$ ne serait pas un T - E -ordre maximal sur X .

Théorème 2.6. [5] Soit $\mathcal{R}$ une relation floue sur un domaine X et E une T -équivalence sur le même domaine, alors les deux assertions suivantes sont équivalences :

1. $\mathcal{R}$ est un T - E -ordre complet.
2. il existe un ordre linéaire $\lesssim$ la relation E est compatible avec tel que $\mathcal{R}$ peut être représenté comme suit :

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \lesssim y, \\ E(x, y) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Comme une conséquence importante du théorème 2.6, nous obtenons que la complétude implique la maximalité.

Proposition 2.15. Pour toute T -équivalence E , tous les T - E -ordres complets sont maximaux.

Démonstration 2.3. Considérons un arbitraire linéairement complet T - E -ordonné $\mathcal{R}$. Supposons que c'est une extension de $\mathcal{R}$ notée $\mathcal{R}'$ ce qui n'est pas trivial, c'est à dire qu'il a une paire (a, b) telle que $\mathcal{R}'(a, b) > \mathcal{R}(a, b)$ depuis $\mathcal{R}(a, b)$, par la représentation (2.3), est soit 1 ou $E(a, b)$, $\mathcal{R}(a, b) = E(a, b) < 1$ doit tenir, sinon $\mathcal{R}'(a, b) > \mathcal{R}(a, b)$ ne pouvait pas être satisfait. Depuis $\lesssim$ est linéaire, $b \lesssim a$ doit tenir, ce qui implique $\mathcal{R}(a, b) = 1$, et nous obtenons

$$T(\mathcal{R}'(a, b), \mathcal{R}'(b, a)) = T(\mathcal{R}'(a, b), 1) = \mathcal{R}'(a, b) > \mathcal{R}(a, b) = E(a, b)$$

ce qui contredit T - E -antisymétrie ; donc $\mathcal{R}$ doit être maximale.

Maintenant, la question est de savoir si l'implication inverse détient, aussi la réponse, cependant, est négative, du moins si l'on considère une t -norme qui est inférieure au minimum.

Proposition 2.16. Supposons que $T \neq T_M$ alors pour tout ensemble X avec au moins deux éléments il existe une T -équivalence E et $\mathcal{R}$ est une T - E -ordre pour la quelle il n'existe pas d'extension linéairement (ou complète).

Démonstration 2.4. Considérons d'abord un ensemble de deux éléments $\{a, b\} \subseteq X$. depuis $T \neq T_M$, il existe deux valeurs $\alpha, \beta \in]0, 1[$ tel que $T(\alpha, \beta) < \min(\alpha, \beta)$. Nous construisons maintenant les deux relations suivantes :

$\mathcal{R}(a, b)$	a	b
a	1	α
b	β	1

$E(a, b)$	a	b
a	1	λ
b	λ	1

où on choisit $\lambda = T(\alpha, \beta)$. C'est facile de prouver que E est une T -équivalence sur $\{a, b\}$ et que $\mathcal{R}$ est un T - E -ordre sur $\{a, b\}$. s'il y avait une extension linéairement (ou complète) de $\mathcal{R}$, il serait possible de soulever $\mathcal{R}(a, b)$ ou $\mathcal{R}(b, a)$ à 1. Par conséquent, les deux relations suivantes sont les deux plus petites relations floues possibles qui étendent $\mathcal{R}$ qui sont linéairement (ou complètes) :

$\mathcal{R}^*(a, b)$	a	b
a	1	1
b	β	1

$\mathcal{R}^*(a, b)$	a	b
a	1	α
b	1	1

Cependant, nous obtenons les deux violent

$$T(\mathcal{R}^*(a, b), \mathcal{R}^*(b, a)) = T(1, \beta) = \beta \geq \min(\alpha, \beta) > T(\alpha, \beta) = \lambda = E(a, b),$$

$$T(\mathcal{R}^*(a, b), \mathcal{R}^*(b, a)) = T(\alpha, 1) = \alpha \geq \min(\alpha, \beta) > T(\alpha, \beta) = \lambda = E(a, b).$$

Par conséquent, $\mathcal{R}$ ne peut pas avoir une extension complète, par Lemme 2.1, on peut étendre E et $\mathcal{R}$ à une T -équivalence E' et un T - E' -ordre $\mathcal{R}'$, respectivement, qui sont les deux relations binaires floues sur tout X entier. Si $\mathcal{R}'$ avait une extension linéairement (ou complètes), ceci impliquerait que $\mathcal{R}$ a aussi une extension complète qui a déjà été prouvée ne pas être le cas. Par conséquent, $\mathcal{R}'$ est un T - E' -ordre sur X qui n'a pas une extension complète.

Lemme 2.2. Soit une T_M -équivalence E , un T_M - E -ordre est maximal si et seulement s'il est linéairement (ou complet).

Théorème 2.7. (Szpilrajn théorème pour T_M - E -ordre)[21] On suppose que E est une T_M -équivalence, alors tout T_M - E -ordre a une extension complète.

Démonstration 2.5. Pour une T -équivalence E donnée et un T - E -ordre $\mathcal{R}$, Théorème 2.5 garantit l'extension d'une extension maximale de $\mathcal{R}$, Lemme 2.2 prouve alors que cette extension est linéairement (ou complètes).

La question reste de savoir si $[INT]$ peut être rempli pour l'affaire $T = T_M$, le théorème suivant donne une caractérisation unique des T - E -ordres qui peuvent être représentés comme des intersections d'extensions linéairement.

Théorème 2.8. (Composition des intersections d'extensions linéairement) Soit E est une T_M -équivalence et soit $\mathcal{R}$ est un T_M - E -ordre, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une famille des T_M - E -ordres $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ très complètes, telle que la représentation suivante :

$$\mathcal{R}(x, y) = \inf_{i \in I} \mathcal{R}_i(x, y).$$

(ii) Pour tous $x, y \in X$,

$$\mathcal{R}(x, y) \in \{E(x, y), 1\}$$

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons que (i) est vrai, c'est-à-dire que $\mathcal{R}$ est une intersection d'extensions linéairement (ou complètes). Maintenant, choisissez une paire $(x, y) \in X$, si $\mathcal{R}(x, y) = 1$, nous avons terminé, inversement, supposons que $\mathcal{R}(x, y) < 1$. Alors il existe un $i \in I$, tel que $\mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{R}_i(x, y) < 1$ est satisfait. Puisque $\mathcal{R}_i$ est linéairement (ou complet), $\mathcal{R}_i(y, x) = 1$ doit tenir. Puis, forme E -réflexivité et T - E -antisymétrique de $\mathcal{R}_i$, on obtient

$$E(x, y) \leq \mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{R}_i(x, y) = \min(\mathcal{R}_i(x, y), \mathcal{R}_i(y, x)) \leq E(x, y),$$

c'est-à-dire, que $\mathcal{R}(x, y) = E(x, y)$ détient.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : On choisit l'ensemble d'index de la manière suivante :

$$I = \{(a, b) \in X^2 \mid \mathcal{R}(a, b) = E(a, b)\}$$

Puis, pour toute paire $(a, b) \in I$, $E(a, b) = \mathcal{R}(a, b) \leq \mathcal{R}(b, a)$ détient. Maintenant, nous définissons une relation floue $\mathcal{R}_{a,b}$ comme

$$\mathcal{R}_{a,b}(x, y) = \max(\mathcal{R}(x, y), \min(\mathcal{R}(x, b), \mathcal{R}(a, y))).$$

De manière analogue à la preuve du Lemme 2.2, $\mathcal{R}_{a,b}$ est un T_M - E -ordre qui est une extension de $\mathcal{R}$ et qui suit :

$$\mathcal{R}_{a,b}(a, b) = \max(\mathcal{R}(a, b), \min(\mathcal{R}(a, b), \mathcal{R}(a, b))) = \mathcal{R}(a, b) = E(x, y), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{R}_{a,b}(b, a) = \max(\mathcal{R}(b, a), \min(\mathcal{R}(b, b), \mathcal{R}(a, a))) = 1. \quad (2.5)$$

Par Théorème 2.7, il existe au moins une extension linéairement (ou complète) de $\mathcal{R}_{a,b}$. Laissez-nous choisir une telle extension et le désigne avec $\mathcal{R}_{a,b}^*$. Puisque $\mathcal{R}_{a,b}^*$ remplit également T_M -E-antisymétrie,

$$E(a, b) \geq \min(\mathcal{R}_{a,b}^*(a, b), \mathcal{R}_{a,b}^*(b, a)) = \min(\mathcal{R}_{a,b}^*(a, b), 1) = \mathcal{R}^*(a, b) \geq E(a, b)$$

Doit tenir. La preuve est terminée si nous réussissons à prouver l'égalité

$$\mathcal{R}(x, y) = \inf_{(a,b) \in I} \mathcal{R}_{a,b}^*(x, y).$$

Laissez-nous choisir une paire arbitraire (x, y) , si $\mathcal{R}(x, y) = 1$ alors $\mathcal{R}_{a,b}^*(x, y) = 1$, doit aussi tenir, puisque tous les $\mathcal{R}_{a,b}^*$ sont des extension de $\mathcal{R}$, Inversement, si $\mathcal{R}(x, y) = E(x, y)$ teint, alors nous avons $(x, y) \in I$ et par (2.4)

$$E(x, y) = \mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}_{x,y}^*(x, y) \geq \inf_{(a,b) \in I} \mathcal{R}_{a,b}^*(x, y).$$

L'inégalité inverse

$$\mathcal{R}(x, y) \leq \inf_{(a,b) \in I} \mathcal{R}_{a,b}^*(x, y)$$

tient en tout cas, puisque tous $\mathcal{R}_{a,b}^*$ sont des extensions de $\mathcal{R}$.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons vu le concept des ensembles flous comme une généralisation de la notion d'ensemble classique, puis on a abordé les relations floues qui sont considérés comme des ensembles flous dans un produit cartésien. Puis, nous avons vu quelques des extensions floues des théorèmes fondamentaux sur les relations.

Aussi, nous avons étudié les relations d'équivalence et d'ordres floues comme des classes particulières du relations floues.

Bibliographie

- [1] D. Abdelghani, Sur les extensions linéaires d'une famille d'ordres α -flous, thèse de Magistère, Université de M'sila, (2010).
- [2] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKRs Scientific Session, Sofia, 1983.
- [3] B. Bede, *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Springer-verley, Berlin, 2013.
- [4] R. Bělohlávek, Concept lattices and order in fuzzy logic, *Ann. Pure App. Logic*, 128(2004), 277-298.
- [5] U. Bodenhofer, A simililarity-based generalization of fuzzy ordering preserving the classical axiomes, *Int. J.Uncertain. Fuzziness knouledye based systems*, 8(2000), 593-610.
- [6] U. Bodenhofer, F. Klawonn, A formal study of lineartiy axioms for fuzzy orderings, *Fuzzy Sets and Systems* 145(2004), 323-354.
- [7] N. Caspard, B. Leclerc et B. Monjardet, *Ensembles Ordonnes Finis :Concepts, Résultats et Usage*, Springer, Berlin Heidelberg, 2000.
- [8] I. Chon, Fuzzy partial ordre relation and fuzzy lattice, *Koreanj. Math*, 17(2009), 361-374.
- [9] B. A. Davey et H. A. Priestley, Introduction to Lattices and order, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
- [10] D. Dubois et H. Parde, *Fundamental of Fuzzy Sets*, Irit, Cnrs et University of Toolouse, Newyork,(2000).
- [11] J. K. George and Y. Bo, *Fuzzy Set and Fuzzy Logic, Theory and Application*, Prentice-hall, 1995.
- [12] J. A. Gogun, L-fuzzy sets, *J. Math. Anal. Appl* 18(1967), 149-156.
- [13] V. Hilaire, Ensembles flous et hydrologie, Rapport de stage, Université Montpellier, 1995.
- [14] G. kamingu. Théorie des ensembles flous, *Larq one pager*, 11(2016),37-45.

- [15] A. Kheniche, L. Zedam and B. Debaets, Compatibility of fuzzy relations, *International Journal of Intelligent Systems* 31(2016), 240-256.
- [16] B. Bouchon-Meunier, *La Logique Floue*, et ses PUF collection «*Quesais – je*», (1993).
- [17] B. Bouchon-Meunier, *La logique Floue et Ses Application*, *Addison wesley*, France, (1995).
- [18] I. Mezzomo, B. C. Berdregal et R. H. N. Santiago, Kinds of ideals of fuzzy lattice, Second Brazilian Congress on Fuzzy Systems, 2012, 657-671.
- [19] S. Milles, Étude de quelques propriétés d'ordres flous intuitionistes, Mémoire de Magistère, Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2010.
- [20] D. Mokeddem, Contrôle Flou des processus biotechnologiques à base d'algorithmes Génétiques, Thèse de Doctorat, Université Ferhat abbas de stif, 2010.
- [21] E, Szpilrajn, Sur l'extenstion de l'ordre partiel, *Fund. Math.* 16(1930), 386-389.
- [22] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets, Informtion and Contrôle*, 8(1965), 338-353.
- [23] L. A. Zadeh, Similarity relation and fuzzy orderings, *Informtion Sciences*, 3(1971), 177-200.
- [24] L. Zedam, Représentations des algèbres multivalentes de lukasiewicz, thèse de doctorat, Université Hadj Lakdar de Batna, 2005.